Linearna algebra I

Definicija 4.2.1.

Dva sustava linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ su ekvivalentna ako imaju isti broj nepoznanica i isti skup rješenja.

Gaussova metoda eliminacije

Definicija 4.2.1.

Dva sustava linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ su ekvivalentna ako imaju isti broj nepoznanica i isti skup rješenja.

Definicija 4.2.2.

Elementarne transformacije sustava linearnih jednadžbi su:

(I) zamjena poretka dviju jednadžbi,

(II) množenje neke jednadžbe skalarom $\lambda \neq 0$,

(III) pribrajanje neke jednadžbe pomnožene skalarom λ nekoj drugoj jednadžbi sustava.

Gaussova metoda eliminacije

Propozicija 4.2.3.

Primjenom konačnog broja elementarnih transformacija na dani sustav linearnih jednadžbi dobiva se ekvivalentan sustav.

Gaussova metoda eliminacije

Propozicija 4.2.3.

Primjenom konačnog broja elementarnih transformacija na dani sustav linearnih jednadžbi dobiva se ekvivalentan sustav.

Napomena 4.2.4.

Uočimo da su elementarne transformacije sustava zapravo elementarne transformacije redaka proširene matrice A_p. Elementarne transformacije stupaca ovdje nećemo izvoditi. Može se primijetiti da bi elementarne transformacije stupaca zapravo značile uvođenje novih nepoznanica koje bi s originalnim nepoznanicama $x_1, \ldots, x_n$ bile vezane linearnim transformacijama.

Korolar 4.2.5.

Neka je Ω prostor rješenja homogenog sustava $AX = 0$, $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$, $\mathrm{r}(A) = r$. Tada je

$$\dim \Omega = n - r.$$

Posebno, ukoliko je $\mathrm{r}(A) = n$ onda sustav $AX = 0$ ima samo trivijalno rješenje.

Primjer 4.2.6.

Riješimo sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 12x_4 & + & 12x_5 & = & -1 \end{array}.$$

Definicija 4.2.7.

Kaže se da je sustav $AX = B$ Cramerov ako je $A \in \mathcal{M}_n$ (dakle, broj jednadžbi je jednak broju nepoznanica) i ako je A regularna matrica.

Definicija 4.2.7.

Kaže se da je sustav $AX = B$ Cramerov ako je $A \in \mathcal{M}_n$ (dakle, broj jednadžbi je jednak broju nepoznanica) i ako je A regularna matrica.

Propozicija 4.2.8.

Cramerov sustav $AX = B$ je rješiv, a rješenje mu je jedinstveno i dano formulom

$$C = A^{-1}B.$$

Korolar 4.2.9.

Neka je $C = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ jedinstveno rješenje Cramerova sustava $AX = B$. Tada je

$$\gamma_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

pri čemu je $D = \det A$, a D_j je determinanta matrice čiji je $j-$ti stupac upravo B, dok su joj ostali stupci isti kao u A.