Linearna algebra I

Darija Marković

www.mathos.hr/la1

Napomena

Binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i množenja $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na skupu realnih brojeva imaju sljedeća svojstva:

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;

(2) postoji $0 \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(3) za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji $-\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je $\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = 0$;

(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(5) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;

(6) postoji $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sa svojstvom $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(7) za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ postoji $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ tako da je $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$;

(8) $\alpha\beta = \beta\alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(9) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Pojam vektorskog prostora

Definicija

Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \forall a, b, c \in V;$

(2) postoji $0 \in V$ sa svojstvom $a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in V;$

(3) za svaki $a \in V$ postoji $-a \in V$ takav da je $a + (-a) = -a + a = 0;$

(4) $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in V;$

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \ \forall a \in V;$

(6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \ \forall a \in V;$

(7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall a, b \in V;$

(8) $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in V.$

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) operacije na vektorskom prostoru su preslikavanja

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) operacije na vektorskom prostoru su preslikavanja

(b) priroda elemenata skupa V je irelevantna. Elementi vektorskog prostora nazivaju se vektori.

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) operacije na vektorskom prostoru su preslikavanja

(b) priroda elemenata skupa V je irelevantna. Elementi vektorskog prostora nazivaju se vektori.

(c) $\mathbb{F}$ može biti bilo koje polje, no najvažniji su slučajevi vektorskih prostora sagrađenih nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$ nazivaju se realni vektorski prostori; za one nad poljem $\mathbb{C}$ kažemo da su kompleksni. Elemente polja zovemo skalarima.

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) operacije na vektorskom prostoru su preslikavanja

(b) priroda elemenata skupa V je irelevantna. Elementi vektorskog prostora nazivaju se vektori.

(c) $\mathbb{F}$ može biti bilo koje polje, no najvažniji su slučajevi vektorskih prostora sagrađenih nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$ nazivaju se realni vektorski prostori; za one nad poljem $\mathbb{C}$ kažemo da su kompleksni. Elemente polja zovemo skalarima.

(d) većina tvrdnji bit će iskazana simultano za oba slučaja i tada će u iskazima stajati simbol $\mathbb{F}$

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) operacije na vektorskom prostoru su preslikavanja

(b) priroda elemenata skupa V je irelevantna. Elementi vektorskog prostora nazivaju se vektori.

(c) $\mathbb{F}$ može biti bilo koje polje, no najvažniji su slučajevi vektorskih prostora sagrađenih nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$ nazivaju se realni vektorski prostori; za one nad poljem $\mathbb{C}$ kažemo da su kompleksni. Elemente polja zovemo skalarima.

(d) većina tvrdnji bit će iskazana simultano za oba slučaja i tada će u iskazima stajati simbol $\mathbb{F}$

(e) formalno se govori o uređenoj trojci $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$, no kada je iz konteksta jasno o kojim je operacijama i o kojem polju riječ, pisat ćemo jednostavno V

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje

Napomena

(a) svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje

(b) uvjet (3) nalaže postojanje suprotnog elementa

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje

(b) uvjet (3) nalaže postojanje suprotnog elementa

(c) svojstvo (5) zovemo kvaziasocijativnost

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje
(b) uvjet (3) nalaže postojanje suprotnog elementa
(c) svojstvo (5) zovemo kvaziasocijativnost
(d) svojstva (6) i (7) zovu se distributivnost množenja prema zbrajanju skalara, odnosno vektora

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje

(b) uvjet (3) nalaže postojanje suprotnog elementa

(c) svojstvo (5) zovemo kvaziasocijativnost

(d) svojstva (6) i (7) zovu se distributivnost množenja prema zbrajanju skalara, odnosno vektora

(e) posljednji zahtjev spriječava degenerirane strukture

Pojam vektorskog prostora

Napomena

(a) svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje
(b) uvjet (3) nalaže postojanje suprotnog elementa
(c) svojstvo (5) zovemo kvaziasocijativnost
(d) svojstva (6) i (7) zovu se distributivnost množenja prema zbrajanju skalara, odnosno vektora
(e) posljednji zahtjev spriječava degenerirane strukture
(f) uvjeti iz definicije su međusobno nezavisni

Pojam vektorskog prostora

Propozicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada

(1) Za $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a \in V$ vrijedi $\alpha a = 0$ ako i samo ako je $\alpha = 0$ ili $a = 0$;

(2) $(-\alpha)a = \alpha(-a) = -(\alpha a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in V$;

(3) $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in V$;

(4) $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in V$.