Linearna algebra I

Baza i dimenzija

Definicija 2.2.1.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Izraz oblika

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k,$$

pri čemu su $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ i $k \in \mathbb{N}$, naziva se linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Baza i dimenzija

Definicija 2.2.1.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Izraz oblika

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k,$$

pri čemu su $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ i $k \in \mathbb{N}$, naziva se linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$$

Baza i dimenzija

Definicija 2.2.2.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

konačan skup vektora iz V. Kažemo da je skup S linearno nezavisan ako vrijedi

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

U suprotnom kažemo da je skup S linearno zavisan.

Napomena 2.2.3.

(a) za svaki konačnan skup $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ vektora iz V linearna kombinacija će očito biti 0 ako su svi koeficijenti nula. Ukoliko je to i jednini način kako možemo dobiti nulvektor linearno kombinirajući vektore iz S, tada je skup linearno nezavisan

Napomena 2.2.3.

(a) za svaki konačnan skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ vektora iz V linearna kombinacija će očito biti 0 ako su svi koeficijenti nula. Ukoliko je to i jednini način kako možemo dobiti nulvektor linearno kombinirajući vektore iz S, tada je skup linearno nezavisan

(b) $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ je linearno zavisan ako $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da

$$\alpha_j \neq 0 \text{ za barem jedan } j \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ i } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0.$$

Napomena 2.2.3.

(a) za svaki konačnan skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ vektora iz V linearna kombinacija će očito biti 0 ako su svi koeficijenti nula. Ukoliko je to i jednini način kako možemo dobiti nulvektor linearno kombinirajući vektore iz S, tada je skup linearno nezavisan

(b) $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ je linearno zavisan ako $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da

$$\alpha_j \neq 0 \text{ za barem jedan } j \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ i } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0.$$

(c) atribut "linearno" najčešće ispuštamo, pa govorimo o nezavisnim, odnosno zavisnim skupovima

Baza i dimenzija

(d) za svaki $a \in V$, $a \neq 0$, jednočlan skup $\{a\}$ je nezavisan

Baza i dimenzija

(d) za svaki $a \in V$, $a \neq 0$, jednočlan skup $\{a\}$ je nezavisan

(e) svaki skup koji sadrži nulvektor je zavisan

Baza i dimenzija

(d) za svaki $a \in V$, $a \neq 0$, jednočlan skup $\{a\}$ je nezavisan

(e) svaki skup koji sadrži nulvektor je zavisan

(f) zavisnost, odnosno nezavisnost ne ovisi o poretku vektora u promatranom skupu S

Baza i dimenzija

(d) za svaki $a \in V$, $a \neq 0$, jednočlan skup $\{a\}$ je nezavisan

(e) svaki skup koji sadrži nulvektor je zavisan

(f) zavisnost, odnosno nezavisnost ne ovisi o poretku vektora u promatranom skupu S

(g) svaki neprazni podskup nezavisnog skupa je nazavisan

Baza i dimenzija

(d) za svaki $a \in V$, $a \neq 0$, jednočlan skup $\{a\}$ je nezavisan

(e) svaki skup koji sadrži nulvektor je zavisan

(f) zavisnost, odnosno nezavisnost ne ovisi o poretku vektora u promatranom skupu S

(g) svaki neprazni podskup nezavisnog skupa je nazavisan

(h) svaki nadskup zavisnog skupa je zavisan

Propozicija 2.2.4.

Skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \geq 2$, u vektorskom prostoru V je linearno zavisan ako i samo ako postoji $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takav da je a_j linearna kombinacija preostalih elemenata skupa S.
Ako je skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \geq 2$, linearno zavisan, uređen, te ako je $a_1 \neq 0$, onda postoji $l \in \{2, \ldots, k\}$ takav da je a_l linearna kombinacija svojih prethodnika u skupu S, tj. vektora $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$.

Definicija 2.2.6

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Linearna ljuska skupa S označava se simbolom $[S]$ i definira kao

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dodatno, definira se $[\emptyset] = \{0\}$.

Baza i dimenzija

Definicija 2.2.6

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Linearna ljuska skupa S označava se simbolom $[S]$ i definira kao

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dodatno, definira se $[\emptyset] = \{0\}$.

Definicija 2.2.7.

Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kaže se da je S sustav izvodnica za V (ili da S generira V) ako vrijedi $[S] = V$.

Baza i dimenzija

Propozicija 2.2.8.

Neka je S sustav izvodnica za vektorski prostor V te neka u S postoji vektor x koji se može prikazati kao linearna kombinacija (nekih drugih) elemenata iz S. Tada je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.

Propozicija 2.2.8.

Neka je S sustav izvodnica za vektorski prostor V te neka u S postoji vektor x koji se može prikazati kao linearna kombinacija (nekih drugih) elemenata iz S. Tada je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.

Definicija 2.2.9.

Konačan skup $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V se naziva baza za V ako je B linearno nezavisan sustav izvodnica za V.

Baza i dimenzija

Teorem 2.2.10.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ baza za V. Tada za svaki $v \in V$ postoje jedinstveno određeni skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da vrijedi

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

Baza i dimenzija

Teorem 2.2.10.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ baza za V. Tada za svaki $v \in V$ postoje jedinstveno određeni skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da vrijedi

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

Definicija 2.2.12.

Kaže se da je vektorski prostor V konačnodimenzionalan ili konačnogeneriran ako postoji neki konačni sustav izvodnica za V.