Linearna algebra I

Baza i dimenzija

Korolar 2.2.22.

Neka je V vektorski prostor, te neka je $\dim V = n < \infty$.

(a) Svaki linearno nezavisan skup u V ima n ili manje elemenata. Svaki linearno nezavisan skup u V koji ima točno n elemenata je baza za V.

(b) Svaki sustav izvodnica za V ima n ili više elemenata. Svaki sustav izvodnica za V koji ima točno n elemenata je baza za V.

Baza i dimenzija

Primjer 2.2.23.

(Lagrangeov interpolacijski polinom) Neka je $n \geq 1$ te neka su dane točke u ravnini (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) pri čemu su svi x_i međusobno različiti. Tada postoji jedinstven polinom p čiji je stupanj manji ili jednak $n-1$, $p \in P_{n-1}$, sa svojstvom

$$p(x_i) = y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Taj polinom p je dan formulom

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{1 \leq k \leq n; k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{1 \leq k \leq n; k \neq j} (x_j - x_k)} y_j.$$

Ovaj polinom p naziva se Lagrangeov interpolacijski polinom.

Baza i dimenzija

Napomena 2.2.24.

Korolar 2.2.22. pokazuje da svaki linearno nezavisan skup u prostoru dimenzije n ima najviše n elemenata. U tom smislu je definicija linearne nezavisnosti, kako smo je naveli, sasvim zadovoljavajuća za konačnodimenzionalne prostore.

Potprostor

Definicija 2.3.1.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V, kažemo da je M potprostor od V.

Potprostor

Definicija 2.3.1.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V, kažemo da je M potprostor od V.

Kada je M potprostor od V, pisat ćemo $M \leq V$.

Potprostor

Definicija 2.3.1.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V, kažemo da je M potprostor od V.

Kada je M potprostor od V, pisat ćemo $M \leq V$.

Propozicija 2.3.2.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(i) $a + b \in M, \qquad \forall a, b \in M,$

(ii) $\alpha a \in M, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in M.$

Potprostor

Korolar 2.3.3.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(i') $\alpha a + \beta b \in M, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in M.$

Potprostor

Korolar 2.3.3.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(i') $\alpha a + \beta b \in M, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in M.$

Napomena 2.3.4.

Ako je $M \leq V$, onda je, po prethodnom korolaru, M zatvoren na dvočlane linearne kombinacije svojih elemenata. Jednostavnim induktivnim elementom može se pokazati da to vrijedi i za sve (naravno, konačne) linearne kombinacije vektora iz M. Eksplicitno: ako je $M \leq V$, onda za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, $a_1, \ldots, a_n \in M$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in M$.

Potprostor

Primjer 2.3.5.

Označimo s $\mathcal{M}_n$ skup svih kvadratnih matrica reda n, G skup svih gornjetrokutastih matrica reda n, a s D skup svih donjetrokutaskih matrica reda n. Vrijedi G $\leq \mathcal{M}_n$ i D $\leq \mathcal{M}_n$.

Potprostor

Primjer 2.3.5.

Označimo s $\mathcal{M}_n$ skup svih kvadratnih matrica reda n, G skup svih gornjetrokutastih matrica reda n, a s D skup svih donjetrokutaskih matrica reda n. Vrijedi G $\leq \mathcal{M}_n$ i D $\leq \mathcal{M}_n$.

Primjer 2.3.6.

Označimo sa S skup svih simetričnih matrica reda n, a s A skup svih antisimetričnih matrica reda n. Vrijedi S $\leq \mathcal{M}_n$ i A $\leq \mathcal{M}_n$.

Potprostor

Primjer 2.3.5.

Označimo s $\mathcal{M}_n$ skup svih kvadratnih matrica reda n, G skup svih gornjetrokutastih matrica reda n, a s D skup svih donjetrokutaskih matrica reda n. Vrijedi G $\leq \mathcal{M}_n$ i D $\leq \mathcal{M}_n$.

Primjer 2.3.6.

Označimo sa S skup svih simetričnih matrica reda n, a s A skup svih antisimetričnih matrica reda n. Vrijedi S $\leq \mathcal{M}_n$ i A $\leq \mathcal{M}_n$.

Primjer 2.3.7.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $S \subset V$. Tada je $[S]$ potprostor od V.

Potprostor

Propozicija 2.3.8.

Neka je V vektorski prostor takav da je $\dim V = n < \infty$, te neka je M potprostor od V. Tada je $\dim M \leq n$.
Ako je M potprostor od V takav da je $\dim M = n$, onda je $M = V$.