Linearna algebra I

Potprostor

Definicija 2.3.21.

Neka je V vektorski prostor, te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L ako vrijedi

$$L \dot{+} M = V.$$

Potprostor

Definicija 2.3.21.

Neka je V vektorski prostor, te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L ako vrijedi

$$L \dot{+} M = V.$$

Teorem 2.3.22.

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i L njegov potprostor. Tada postoji direktan komplement od L u V.

Potprostor

Definicija 2.3.21.

Neka je V vektorski prostor, te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L ako vrijedi

$$L \dot{+} M = V.$$

Teorem 2.3.22.

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i L njegov potprostor. Tada postoji direktan komplement od L u V.

Napomena 2.3.23.

U proizvoljnom vektorskom prostoru niti jedan netrivijalni potprostor nema jedinstven direktan komplement.

Potprostor

- V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan, M potprostor od V

Potprostor

- V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan, M potprostor od V
- definiramo binarnu relaciju $\sim$ na V formulom

$$x \sim y \Longleftrightarrow y - x \in M, \quad x, y \in V$$

Potprostor

- V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan, M potprostor od V
- definiramo binarnu relaciju $\sim$ na V formulom

$$x \sim y \Longleftrightarrow y - x \in M, \quad x, y \in V$$

- za $x \in V$ s $[x]$ označavamo klasu ekvivalencije određenu vektorom x, odnosno

$$[x] = \{y \in V \ : x \sim y\}$$

Potprostor

- V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan, M potprostor od V
- definiramo binarnu relaciju $\sim$ na V formulom

$$x \sim y \Longleftrightarrow y - x \in M, \quad x, y \in V$$

- za $x \in V$ s $[x]$ označavamo klasu ekvivalencije određenu vektorom x, odnosno

$$[x] = \{y \in V \ : x \sim y\}$$

- x nazivamo reprezentantom ili predstavnikom ove klase ekvivalencije. Uočimo da se ista klasa $[x]$ može predočiti i drugim predstavnicima

$$[x] = [y] \Longleftrightarrow x \sim y$$

Potprostor

- klase ekvivalencije za ovako uvedenu relaciju možemo i preciznije opisati:
  vrijedi
  $$[x] = x + M, \quad \forall x \in V,$$
  pri čemu $x + M$ označava skup $\{x + a \ : \ a \in M\}$

Potprostor

- klase ekvivalencije za ovako uvedenu relaciju možemo i preciznije opisati:
  vrijedi
  $$[x] = x + M, \quad \forall x \in V,$$
  pri čemu $x + M$ označava skup $\{x + a \ : \ a \in M\}$

Definicija 2.3.24.

Neka je M potprostor prostora V. Svaki skup oblika

$$x + M = \{x + a \ : \ a \in M\}, \quad x \in V,$$

naziva se linearna mnogostrukost u smjeru potprostora M. Skup svih linearnih mnogostrukosti u smjeru potprostora M označava se s V/M i naziva kvocijentni skup ili kvocijent (prostora V po potprostoru M).

Potprostor

Teorem 2.3.25.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je M potprostor od V. Tada je uz operacije

$$(x+M)+(y+M)=(x+y)+M, \quad x,y \in V$$

$$\alpha(x+M)=\alpha x+M, \quad \alpha \in \mathbb{F}, x \in M,$$

kvocijentni skup V/M vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Potprostor

Teorem 2.3.25.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je M potprostor od V. Tada je uz operacije

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M, \quad x, y \in V$$

$$\alpha(x + M) = \alpha x + M, \quad \alpha \in \mathbb{F}, x \in M,$$

kvocijentni skup V/M vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Teorem 2.3.26.

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i M njegov potprostor. Tada je i prostor V/M konačnodimenzionalan i vrijedi

$$\dim V/M = \dim V - \dim M.$$

- za prirodne brojeve m i n, preslikavanje

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{F}$$

naziva se matrica tipa (m, n) s koeficijentima iz $\mathbb{F}$

- za prirodne brojeve m i n, preslikavanje

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$$

naziva se matrica tipa (m, n) s koeficijentima iz $\mathbb{F}$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- za prirodne brojeve m i n, preslikavanje

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$$

naziva se matrica tipa (m, n) s koeficijentima iz $\mathbb{F}$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- skup svih matrica s m redaka i n stupaca s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označavamo s $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$. Ako je $m = n$ pišemo kraće $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, a elemente tog skupa zovemo kvadratnim matricama reda n

Operacije s matricama

- $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$

  $$A + B = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$$

  pri čemu je

  $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

- $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$, $\lambda \in \mathbb{F}$

  $$\lambda A = [d_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$$

  pri čemu je

  $$d_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

- $(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}), +, \cdot)$ je vektorski prostor dimenzije mn

Operacije s matricama

Definicija 3.1.1.

Neka je $A \in \mathcal{M}_{mn}$ i $B \in \mathcal{M}_{rs}$. Kažemo da su matrice A i B ulančane ako je $n = r$.

Operacije s matricama

Definicija 3.1.1.

Neka je $A \in \mathcal{M}_{mn}$ i $B \in \mathcal{M}_{rs}$. Kažemo da su matrice A i B ulančane ako je $n = r$.

Definicija 3.1.2.

Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{ns}$ ulančane. Tada je produkt AB definiran kao matrica

$$AB = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{ms}$$

pri čemu je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s.$$

Operacije s matricama

Napomena 3.1.3.

(a) množenje matrica je preslikavanje

$$\cdot : \mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{ns} \to \mathcal{M}_{ms}, \quad m, n, s \in \mathbb{N}.$$

Zato, općenito, množenje nije binarna operacija. Izuzetak je jedino slučaj $m = n = s$.

Operacije s matricama

Napomena 3.1.3.

(a) množenje matrica je preslikavanje

$$\cdot : \mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{ns} \to \mathcal{M}_{ms}, \quad m, n, s \in \mathbb{N}.$$

Zato, općenito, množenje nije binarna operacija. Izuzetak je jedino slučaj $m = n = s$.

(b) iz definicije je jasno da množenje matrica nije komutativna operacija.

Operacije s matricama

Napomena 3.1.3.

(a) množenje matrica je preslikavanje

$$\cdot : \mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{ns} \to \mathcal{M}_{ms}, \quad m, n, s \in \mathbb{N}.$$

Zato, općenito, množenje nije binarna operacija. Izuzetak je jedino slučaj $m = n = s$.

(b) iz definicije je jasno da množenje matrica nije komutativna operacija.

(c) za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_{mn}$ vrijedi $A0 = 0$ i $0A = 0$ (pri čemu nulmatrica mora biti prikladno formatirana da bismo je s desna ili s lijeva mogli množiti s A)

Napomena 3.1.3.

(d) za $n \in \mathbb{N}$ definiramo jediničnu matricu reda n kao kvadratnu matricu

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lako se provjeri da za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_{mn}$ vrijedi $AI = A$ i $IA = A$. Pritom je bitno uočiti da je u prvoj navedenoj jednakosti $I \in \mathcal{M}_n$, dok je u drugoj jednakosti $I \in \mathcal{M}_m$.

Teorem 3.1.4.

Za množenje matrica vrijedi (kad god su navedeni produkti definirani)

(1) $A(B + C) = AB + AC$;

(2) $(A + B)C = AC + BC$;

(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$;

(4) $(AB)C = A(BC)$;

(5) $IA = A$, $AI = A$.