Linearna algebra I

Operacije s matricama

Korolar 3.1.5.

Množenje matrica u vektorskom prostoru $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ ima sljedeća svojstva:

(1) $A(B+C) = AB + AC, \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$;

(2) $(A+B)C = AC + BC, \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$;

(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$;

(4) $(AB)C = A(BC), \quad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$;

(5) $IA = AI = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

Operacije s matricama

Definicija 3.1.6.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ na kojem je, dodatno, zadana binarna operacija množenja

$$\cdot : V \times V \to V.$$

Tada se V zove asocijativna algebra s jedinicom ako operacija množenja na V ima sljedeća svojstva:

(1) $a(b+c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in V;$

(2) $(a+b)c = ac + bc, \quad \forall a, b, c \in V;$

(3) $(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in V;$

(4) $(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in V;$

(5) postoji $e \in V$ sa svojstvom $ea = ae = a, \quad \forall a \in V.$

Korolar 3.1.7

$\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ je asocijativna algebra s jedinicom.

Korolar 3.1.7

$\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ je asocijativna algebra s jedinicom.

Definicija 3.1.8.

Kaže se da je matrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ regularna ako postoji matrica $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi

$$AB = BA = I.$$

U tom se slučaju matrica B zove multiplikativni inverz ili inverzna matrica od A i označava s A^{-1}.
Za matricu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ koja nema multiplikativni inverz kažemo da je singularna.

Operacije s matricama

Napomena 3.1.9.

(a) uočimo da matrica $A \in \mathcal{M}_n$ može imati najviše jedan inverz

Napomena 3.1.9.

(a) uočimo da matrica $A \in \mathcal{M}_n$ može imati najviše jedan inverz

(b) matrica I je regularna i sama sebi inverzna

Operacije s matricama

Napomena 3.1.9.

(a) uočimo da matrica $A \in \mathcal{M}_n$ može imati najviše jedan inverz

(b) matrica I je regularna i sama sebi inverzna

(c) ako je matrica A regularna, onda je i A^{-1} regularna matrica

Operacije s matricama

Napomena 3.1.9.

(a) uočimo da matrica $A \in \mathcal{M}_n$ može imati najviše jedan inverz

(b) matrica I je regularna i sama sebi inverzna

(c) ako je matrica A regularna, onda je i A^{-1} regularna matrica

(d) ako su matrice $A, B \in \mathcal{M}_n$ regularne, regularan je i njihov umnožak AB te vrijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Operacije s matricama

Napomena 3.1.9.

(a) uočimo da matrica $A \in \mathcal{M}_n$ može imati najviše jedan inverz

(b) matrica I je regularna i sama sebi inverzna

(c) ako je matrica A regularna, onda je i A^{-1} regularna matrica

(d) ako su matrice $A, B \in \mathcal{M}_n$ regularne, regularan je i njihov umnožak AB te vrijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(e) skup svih regularnih matrica $n-$tog reda s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označava se s $GL(n, \mathbb{F})$

Operacije s matricama

Propozicija 3.1.10.

Za binarnu operaciju množenja na skupu $GL(n, \mathbb{F})$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

(1) $A(BC) = (AB)C, \quad \forall A, B, C \in GL(n, \mathbb{F})$;

(2) postoji $I \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je
$AI = IA = A, \quad \forall A \in GL(n, \mathbb{F})$;

(3) za svaku matricu $A \in GL(n, \mathbb{F})$ postoji $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{F})$ tako da vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Dakle, $(GL(n, \mathbb{F}), \cdot)$ je grupa.

Operacije s matricama

Propozicija 3.1.10.

Za binarnu operaciju množenja na skupu $GL(n, \mathbb{F})$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

(1) $A(BC) = (AB)C, \quad \forall A, B, C \in GL(n, \mathbb{F})$;

(2) postoji $I \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je
$AI = IA = A, \quad \forall A \in GL(n, \mathbb{F})$;

(3) za svaku matricu $A \in GL(n, \mathbb{F})$ postoji $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{F})$ tako da vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Dakle, $(GL(n, \mathbb{F}), \cdot)$ je grupa.

Definicija 3.1.11.

$GL(n, \mathbb{F})$ se zove opća linearna grupa reda n nad poljem $\mathbb{F}$.

Determinanta

Definicija 3.2.1.

Neka je n proizvoljan prirodan broj. Permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ je bilo koja bijekcija

$$p : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Često se kaže i da je p permutacija od n elemenata. Skup svih permutacija od n elemenata označavamo sa S_n.

Determinanta

Definicija 3.2.1.

Neka je n proizvoljan prirodan broj. Permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ je bilo koja bijekcija

$$p : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}.$$

Često se kaže i da je p permutacija od n elemenata. Skup svih permutacija od n elemenata označavamo sa S_n.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$$

Determinanta

Definicija 3.2.1.

Neka je n proizvoljan prirodan broj. Permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ je bilo koja bijekcija

$$p : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Često se kaže i da je p permutacija od n elemenata. Skup svih permutacija od n elemenata označavamo sa S_n.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}$$

Propozicija 3.2.2.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Skup S_n s kompozicijom kao binarnom operacijom čini grupu od $n!$ elemenata.

Determinanta

Propozicija 3.2.3.

Neka je $q \in S_n$ proizvoljna permutacija. Preslikavanja

$$l_q : S_n \to S_n, \quad l_q(p) = qp$$

i

$$d_q : S_n \to S_n, \quad d_q(p) = pq$$

su bijekcije. Preslikavanje $p \mapsto p^{-1}$ je također bijekcija skupa S_n na samog sebe.

Determinanta

Definicija 3.2.4.

Neka je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

Svaki par (i, j) takav da vrijedi $i < j$ i $p(i) > p(j)$ naziva se inverzija u permutaciji p. Broj svih inverzija u p označava se s $I(p)$. Ukoliko je $I(p)$ paran broj, kažemo da je permutacija parna, u sprotnom kažemo da je p neparna permutacija.

Determinanta

Definicija 3.2.4.

Neka je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

Svaki par (i, j) takav da vrijedi $i < j$ i $p(i) > p(j)$ naziva se inverzija u permutaciji p. Broj svih inverzija u p označava se s $I(p)$. Ukoliko je $I(p)$ paran broj, kažemo da je permutacija parna, u sprotnom kažemo da je p neparna permutacija.

Definicija 3.2.5.

Za $p \in S_n$ definira se predznak (signum) kao

$$\operatorname{sign} p := (-1)^{I(p)}.$$

Determinanta

Propozicija 3.2.6.

Za sve p iz S_n vrijedi

$$\operatorname{sign} p = \prod_{i<j} \frac{p(j) - p(i)}{j - i}.$$

Determinanta

Propozicija 3.2.6.

Za sve p iz S_n vrijedi

$$\operatorname{sign} p = \prod_{i<j} \frac{p(j)-p(i)}{j-i}.$$

Propozicija 3.2.7.

Za sve p i q iz S_n vrijedi

$$\operatorname{sign} pq = \operatorname{sign} p \cdot \operatorname{sign} q.$$

Determinanta

Propozicija 3.2.6.

Za sve p iz S_n vrijedi

$$\operatorname{sign} p = \prod_{i<j} \frac{p(j) - p(i)}{j - i}.$$

Propozicija 3.2.7.

Za sve p i q iz S_n vrijedi

$$\operatorname{sign} pq = \operatorname{sign} p \cdot \operatorname{sign} q.$$

Korolar 3.2.8.

Za svaku permutaciju p iz S_n vrijedi

$$\operatorname{sign} p = \operatorname{sign} p^{-1}.$$

Determinanta

- $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < j \leq n$

$$p(k) = \left\{ \begin{array}{ll} k, & k \neq i, j \\ j, & k = i \\ i, & k = j \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n-1 & n \end{array} \right)$$

Svaka permutacija ovog tipa naziva se transpozicija.
Transpoziciju općenito možemo označiti s $p(i \leftrightarrow j)$.

Determinanta

- $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < j \leq n$

$$p(k) = \left\{ \begin{array}{ll} k, & k \neq i, j \\ j, & k = i \\ i, & k = j \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n-1 & n \end{array} \right)$$

Svaka permutacija ovog tipa naziva se transpozicija.
Transpoziciju općenito možemo označiti s $p(i \leftrightarrow j)$.

Propozicija 3.2.9.

Svaka transpozicija je neparna permutacija.