PISMENI ISPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 1

Zadatak 1. [20 bodova]
Za matricu $A \in M_2(\mathbf{R})$ definiramo njen *komutant*

$$\mathcal{C}(A) = \{X \in M_2(\mathbf{R}) : AX = XA\}.$$

Dokažite da je $\mathcal{C}(A)$ potprostor od $M_2(\mathbf{R})$. Nadalje, ako su

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

odredite neku bazu za $\mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$.

Zadatak 2. [20 bodova]
Neka je $A \in M_n$ regularna matrica, te neka je $\tilde{\tilde{A}}$ adjunkta adjunkte matrice A. Dokažite da je $\tilde{\tilde{A}} = (\det A)^{n-2}A$.

Zadatak 3. [20 bodova]
Izračunajte sljedeću determinantu n-tog reda:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

Zadatak 4. [20 bodova]
U ovisnosti o realnom parametru β odredite rang sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2\beta \\ 5 & \beta & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 5. [20 bodova]
Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Ivona Puljić