Linearna algebra 1

Vježbe 1

25.2.2014.

Zadatak 1.

Dokažite da vrijede relacije:

a) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

b) $(\alpha - \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{a}$

c) $\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b}$

za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.

Neka je $A = (1,2,1)$, $B = (1,1,0)$ i $C = (0,1,1)$. Ispitajte čine li radij-vektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ bazu prostora $V^3(O)$.

Zadatak 3.

Pokaži da vektori

$$\begin{gathered}\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}\end{gathered}$$

tvore bazu za $\mathbb{R}^3$ i prikaži vektor $6\overrightarrow{i}+9\overrightarrow{j}+14\overrightarrow{k}$ u toj bazi.

Domaća zadaća

Zadatak 4.

Pokaži da vektori

$$\overrightarrow{e_1} = (2, 1, -3)$$
$$\overrightarrow{e_2} = (3, 2, -5)$$
$$\overrightarrow{e_3} = (1, -1, 1)$$

tvore bazu za $\mathbb{R}^3$ i prikaži vektor $\overrightarrow{x} = (6, 2, -7)$ u toj bazi.

Zadatak 5.

Koja linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ i $\overrightarrow{v} = (3, 1)$ daje vektor $\overrightarrow{w} = (14, 8)$?

Zadatak 6.

a) Neka je $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ baza prostora $V^2(O)$. Pokažite da je tada i $\{\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\}$ jedna baza za $V^2(O)$.

b) Odredite nužan i dovoljan uvjet na skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ da bi skup $\{\alpha\overrightarrow{a} - \beta\overrightarrow{b}, \gamma\overrightarrow{a} + \delta\overrightarrow{b}\}$ bio baza za $V^2(O)$.

Zadatak 7.

Opišite sve linearne kombinacije vektora $\overrightarrow{v} = (1, 1, 0)$ i $\overrightarrow{w} = (0, 1, 1)$. Pronađite barem jedan vektor koji nije kombinacija vektora $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$.

Domaća zadaća

Zadatak 8.

Ako su tri vrha paralelograma $(1,1)$, $(4,2)$, $(1,3)$, odredite četvrti vrh paralelograma. Skicirajte rješenje(a).

Zadatak 9.

Četiri vrha kocke u prostoru imaju kordinate $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Kako glase koordinate preostalih vrhova? Koliko vrhova bi *kocka* imala u četverodimenzionalnom prostoru, ako tipični vrh ima koordinate $(0,0,1,0)$.

`Rješenje:`
Koordinate preostalih vrhova glase:
$(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$.
Kocka u $\mathbb{R}^3$ ima 8 vrhova, a u 4D prostoru bi imala $2^4 = 16$ vrhova: $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$.

Zadatak 10.

U Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu odredi točku $T = (x, y, z)$ takvu da radij-vektor $\overrightarrow{r}$ točke T ima duljinu 6, da zatvara s osi Ox kut od $\pi/4$, a s osi Oy kut od $\pi/3$, te da je aplikata z točke T negativna.

Zadatak 11.

Neka su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ dva nekolinearna radij-vektora u ravnini. Odredite sve linearne kombinacije $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ uz ograničenja $0 \leq \alpha \leq 1$ i $0 \leq \beta \leq 1$.

Zadatak 12.

Koji vektori u prostoru $\mathbb{R}^3$ su linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, ali i vektora $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$? Pretpostavite da su $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ nekomplanarni.

Rješenje:
Vektore koji su kolinearni sa vektorom $\overrightarrow{v}$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, ali i vektora $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$.

Zadatak 13.

Neka su O, A, B tri različite točke u ravnini, a A_1, B_1 takve točke da je

$$\overrightarrow{OA_1} = \lambda\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OB_1} = \lambda\overrightarrow{OB}$$

$\lambda \neq 0$ realan broj. Dokažite da je tada $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Zadatak 14.

Neka su O, A, B tri međusobno različite točke. Nacrtajte skup svih točaka C za koje je

$$\overrightarrow{OC} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$$

kad λ ide po skupu realnih brojeva.

Zadatak 15.

Služeći se vektorskom interpretacijom ispitajte rješivost sljedećih sustava:

a) $$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x - 4y &= 2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Zadatak 16.

Služeći se vektorskom interpretacijom pokažite je sustav

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 4 \\ x + 2y - z &= 7 \end{aligned}$$

rješiv te da je skup njegovih rješenja beskonačan jednoparametarski skup. Nakon toga riješite sustav služeći se nekom od metoda.

Zadatak 17.

Koliki mora biti λ da bi sustav za taj odabir λ imao jedinstveno rješenje?

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y + z &= 4 \\ 2x + y + 2z &= 5 \\ 3x + 2y + 3z &= 12 \end{aligned}$$