

Linearna algebra 1

Vježbe 10

29.4.2014.

Zadatak 1.

Za permutacije τ , σ i ρ izračunajte $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \rho$, $\tau \circ \sigma^{-1} \circ \rho$ i $\tau \circ \sigma \circ \rho^{-1}$.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2.

Pokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup A_n svih parnih permutacija od n elemenata uz kompoziciju kao binarnu operaciju čini grupu.
(Grupa A_n se naziva alternirajuća podgrupa od S_n .)

Zadatak 3.

Koristeći Sarusovo pravilo izračunajte:

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -11 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Zadatak 4.

Svođenjem na gornjetrokutastu matricu odredite sljedeće determinante:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

e)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

f)

$$\begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix}$$

g)

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{vmatrix}$$

Zadatak 5.

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

b) Razvojem po 3. stupcu matrice izračunajte

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

c) Razvojem po 2. retku matrice izračunajte

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

d) Razvojem po pogodnom retku ili stupcu matrice izračunajte

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

Zadatak 6.

Riješi jednađžbu:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

b)

$$\begin{vmatrix} x & 2x & -x \\ 5 & -1 & x \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Zadatak 7.

Vektori

$$a = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3$$

$$b = b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3$$

$$c = c_x e_1 + c_y e_2 + c_z e_3$$

su linearno zavisni ako je

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

- a) Jesu li vektori: $a = (2, -3, 1)$, $b = (1, 1, -3)$ i $c = (-1, -3, 1)$ linearno zavisni?
- b) Jesu li vektori: $a = (2, 1, 1)$, $b = (-1, -1, 1)$ i $c = (1, 0, 2)$ linearno nezavisni?

Zadatak 8.

- a) Za matricu $A \in \mathcal{M}_4$ takvu da je $\det A = 2$ odredite:
- (1) $\det(2A)$
 - (2) $\det A^4$
 - (3) $\det A^{-1}$
 - (4) $\det(-A)$
- b) Za matricu $A \in \mathcal{M}_3$ takvu da je $\det A = -3$ odredite:
- (1) $\det(\frac{1}{2}A)$
 - (2) $\det A^5$
 - (3) $\det A^{-1}$
 - (4) $\det(-A)$

Zadatak 9.

Uočite pogrešku u zaključivanju:

a)

$$CD = -DC$$

$$\det C \det D = -\det D \det C$$

$$\det C = 0 \quad \text{ili} \quad \det D = 0$$

b) Neka je $A \in \mathcal{M}_2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Tada je

$$\begin{aligned} \det A^{-1} &= \det \left(\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{\det A} \det \left(\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = \frac{ad - bc}{ad - bc} = 1 \end{aligned}$$

Zadatak 10.

- a) Neka su A i B kvadratne matrice i $D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$. Pokažite da je $\det D = \det A \det B$.
- b) Dokažite da vrijedi

$$\det \begin{bmatrix} I & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(D - BC).$$