Linearna algebra 1

Vježbe 12

13.5.2014.

Zadatak 1.

Neka su A i B matrice sa svojstvom $2A - B = I$. Dokaži da je A idempotentna ako i samo ako je B involutorna.

Zadatak 2.

Neka je $f(t)$ polinom u t. Dokaži da je $f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S$ za regularnu matricu $S \in \mathcal{M}_n$ i bilo koju matricu $A \in \mathcal{M}_n$.

Domaća zadaća

Zadatak 3.

Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ singularna matrica. Dokažite da je tada i $\tilde{A}$ singularna.

Zadatak 4.

Pokažite da je adjunkta gornjetrokutaste matrice također gornjetrokutasta.

Zadatak 5.

Svedi na reducirani oblik i odredi rang matrica:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Zadatak 6.

U ovisnosti o parametru λ nađi rang matrice:

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & 3 \\ 1 & 11 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 7.

Odredi $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da rang matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 & 13 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 19 & 25 \\ \lambda & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

bude 3.

Zadatak 8.

Za zadane matrice $B \in \mathcal{M}_{n1}$ i $C \in \mathcal{M}_{1n}$, $B, C \neq 0$, pokažite da je rang matrice $A = BC$ jednak 1.
Obratno, pokažite da za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_n$ ranga 1 postoje $B \in \mathcal{M}_{n1}$ i $C \in \mathcal{M}_{1n}$, $B, C \neq 0$, takve da je $A = BC$.

Definicija

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Elementarne matrice $n-$tog reda su (elementi koji nisu eksplicitno navedeni jednaki su nula)

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}} & \overset{i}{\downarrow} & \phantom{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}} & \overset{j}{\downarrow} & \phantom{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \phantom{\begin{matrix}1\\\ddots\\1\end{matrix}} \\ i \rightarrow \\ \phantom{\begin{matrix}1\\\ddots\\1\end{matrix}} \\ j \rightarrow \\ \phantom{\begin{matrix}1\\\ddots\\1\end{matrix}} \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} \end{array}\right] \end{array}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j;$$

Rang

$$E_{i,\lambda} = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} & & & i & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{matrix} \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\};$$

$$E_{ij,\lambda} = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} & j & & & & & \\ & \downarrow & & & & & \end{matrix} \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \lambda & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j, \quad \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}.$$

Rang

$$E_{i,\lambda} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\};$$

$$E_{ij,\lambda} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccc} & j & & & & & \\ & \downarrow & & & & & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \lambda & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, \quad \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}.$$

Rang

Napomena

Podrazumijevamo da je u matrici $E_{ij,\lambda}$ skalar λ na mjestu (i,j) (pa je u navedenoj definiciji matrica $E_{ij,\lambda}$ prikazana u slučaju kad je $j < i$).
Sve elementarne matrice su regularne. Štoviše, lako je odrediti i inverze elementarnih matrica. Vrijedi

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}, \quad E_{i,\lambda}^{-1} = E_{i,\frac{1}{\lambda}}, \quad E_{ij,\lambda}^{-1} = E_{ij,-\lambda}$$

Zadatak 9.

Slijeva pomnožite matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 14 & 8 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ matricama

- $E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $E_{13,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $E_{3,-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

i uočite promjene na matrici A.

Uočimo sljedeće:

množenje matrice A slijeva matricom...	pripadna elementarna transformacija u matrici A
E_{13}	zamjena 1. i 3. retka
$E_{13,2}$	množenje 3. retka skalarom 2 i dodavanje 1. retku
$E_{3,-5}$	množenje 3. retka skalarom -5

Zadatak 10.

Odredite LU-dekompoziciju matrice:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zadatak 11.

Odredite LU-faktorizaciju matrice:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$