

Linearna algebra 1

Vježbe 13

20.5.2014.

Zadatak 1.

Odredite LU i LDU -faktORIZACIJU matrice A i na temelju toga odredite njenu determinantu:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Uočimo da svaku gornjetrokutastu matricu G možemo zapisati kao produkt dijagonalne matrice D i gornjetrokutaste matrice G' koja na glavnoj dijagonali ima samo jedinice:

$$G = DG'$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

Primjer 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 8 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 6/2 \\ 0 & 1 & -3/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

c)

$$C = \begin{bmatrix} 70 & 12 & 36 \\ 10 & 2 & 5 \\ -30 & -22 & -2 \end{bmatrix}$$

d)

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 15 & -4 \\ -1 & -3 & -6 \\ 6 & 1 & -12 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.

Neka je

$$A = L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2$$

pri čemu su D_1, D_2 dijagonalne matrice, L_1, L_2 donjetrokutaste s jedinicama na dijagonali, a U_1, U_2 gornjetrokutaste s jedinicama na dijagonali. Tada je $L_1 = L_2$, $D_1 = D_2$, $U_1 = U_2$.

Iskoristite ovu tvrdnju kako bi pokazali da je jedinstvena LDU dekompozicija simetrične matrice A (koja dozvoljava LDU dekompoziciju) jednaka

$$A = LDL^T.$$

Primjer 2.

Gauss-Jordanovom metodom odredite inverz matrice A , ukoliko taj inverz postoji:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Uočite da Gauss-Jordanova metoda predstavlja kraći postupak množenja matrice A slijeva elementarnim matricama:

$$I = \underbrace{E_{23,3} E_{13,-1} E_{3,-\frac{1}{7}} E_{32,5} E_{12,-2} E_{2,-1} E_{23} E_{31,-1} E_{21,-1}}_{A^{-1}} A$$

Zadatak 3.

Gauss-Jordanovom metodom odredite inverz sljedećih matrica (ukoliko inverz postoji):

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -6 \\ -4 & -2 & 8 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

d)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

e)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

f)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4.

U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite inverz matrice:

a)

$$A = \begin{bmatrix} a & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} a & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Zadatak 5.

Riješi sljedeće homogene sustave:

a) $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
 $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$
 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

b) $2x - y + 3z = 0$
 $x + 2y - 5z = 0$
 $3x + y - 2z = 0$

c) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$
 $7x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$
 $3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$
 $5x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$