

Linearna algebra 1

Vježbe 2

4.3.2014.

Zadatak 1.

Neka je G neprazan skup i $*$: $G \times G \rightarrow G$ binarna operacija na G . Uređen par $(G, *)$ se zove grupa ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- i) $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$
- ii) postoji $e \in G$ takav da je $a * e = e * a = a, \forall a \in G$
- iii) za svaki $a \in G$ postoji $a^{-1} \in G$ takav da vrijedi
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Ako još i vrijedi i

- iv) $a * b = b * a, \forall a, b \in G$

kažemo da je $(G, *)$ komutativna (Abelova) grupa. Pokažite da su $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelove grupe.

Zadatak 2.

Neka je S neprazan skup. Označimo s $B(S)$ skup svih bijektivnih preslikavanja sa S u S . Dokažite da je skup $B(S)$ uz kompoziciju preslikavanja kao binarnu operaciju grupa. Uočite da grupa $(B(S), \circ)$ nije komutativna čim skup S ima više od dva elementa.

Zadatak 3.

Za realne funkcije f i g definiran je njihov njihov zbroj sa $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ i množenje funkcije skalarom sa $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori:

- (a) skup svih funkcija na intervalu $[a, b]$;
- (b) skup svih ograničenih funkcija na intervalu $[a, b]$;
- (c) skup svih neprekidnih funkcija na intervalu $[a, b]$;
- (d) skup svih funkcija definiranih na $\mathbb{R}$ takvih da je $f(0) = 1$;
- (e) skup svih funkcija definiranih na $\mathbb{R}$ takvih da je $2f(0) - 3f(1) = 0$.

Zadatak 4.

Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori:

- (a) skup svih diferencijabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$;
- (b) skup svih funkcija takvih da je $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq 1$.

Zadatak 5.

Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori (uz uobičajene operacije s matricama):

- (a) skup svih matrica reda 2 nad $\mathbb{R}$ (oznaka: $\mathcal{M}_2$);
- (b) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;
- (c) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;
- (d) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zadatak 6.

Dokaži da je skup $\mathcal{P}_n$ svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n (uz standardne operacije zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom) vektorski prostor.

Zadatak 7.

Za nizove realnih brojeva definirano je zbrajanje nizova

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$$

i množenje nizova skalarima iz polja $\mathbb{R}$

$$\alpha(a_1, a_2, a_3, \dots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots).$$

Pokažite da je skup aritmetičkih nizova uz ovako definirane operacije

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_{k+1} - x_k = x_2 - x_1, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

vektorski prostor.

Zadatak 8.

Provjerite da li je skup $\{(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)\}$ linearno nezavisan u prostoru $\mathbb{R}^3$?

Domaća zadaća

Zadatak 9.

Provjerite da li su sljedeći skupovi linearno nezavisni u prostoru $\mathbb{R}^4$:

- (a) $\{(1, 3, -1, 4), (3, 8, -5, 7), (2, 9, 4, 23)\}$;
- (b) $\{(1, -2, 4, 1), (2, 1, 0, -3), (3, -6, 1, 4)\}$.

Zadatak 10.

Neka je $\mathcal{P}$ vektorski prostor polinoma nad $\mathbb{R}$. Provjerite da li je skup $\{u, v, w\}$ linearno nezavisan ako je

$$u(t) = t^3 + 4t^2 - 2t + 3,$$

$$v(t) = t^3 + 6t^2 - t + 4,$$

$$w(t) = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7.$$

Domaća zadaća

Zadatak 11.

Provjerite da li su sljedeći skupovi linearno nezavisni u prostoru $\mathcal{P}_3$:

(a) $\{t^3 - 4t^2 + 2t + 3, t^3 + 2t^2 + 4t - 1, 2t^3 - t^2 - 3t + 5\};$

(b) $\{t^3 - 5t^2 - 2t + 3, t^3 - 4t^2 - 3t + 4, 2t^3 - 7t^2 - 7t + 9\}.$

Zadatak 12.

Neka je V vektorski prostor realnih funkcija realne varijable.

Pokažite da je skup $\{f, g, h\}$ linearno nezavisan ako je $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$ i $h(t) = t$.

Zadatak 13.

Neka je $\mathcal{M}_2$ vektorski prostor matrica reda 2. Provjerite da li je skup $\{A, B, C\}$ linearno nezavisan ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 14.

Za koje vrijednosti parametra t je skup

$$\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, 4, 0), (1, t, 7, 1)\}$$

linearno nezavisan u prostoru $\mathbb{R}^4$?

Zadatak 15.

Dokažite da je svaki skup matrica koji sadrži nul-matricu linearno zavisn.

Zadatak 16.

Pokažite da je skup $\{v, w\}$, gdje je $v = (1 + i, 2i)$ i $w = (1, 1 + i)$, linearno zavisn nad poljem $\mathbb{C}$, ali linearno nezavisan nad poljem $\mathbb{R}$.

Domaća zadaća

Zadatak 17.

Pokažite da je skup $\{v, w\}$, gdje je $v = (3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ i $w = (7, 1 + 2\sqrt{2})$, linearno zavisn nad poljem $\mathbb{R}$, ali linearno nezavisn nad poljem $\mathbb{Q}$.

Zadatak 18.

Pretpostavimo da je skup $\{u, v, w\}$ linearno nezavisan. Pokažite da je i skup $\{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ također linearno nezavisan.