Linearna algebra 1

Vježbe 4

18.3.2014.

Zadatak 1.

(a) Nadopunite skup A do baze prostora $\mathbb{R}^4$.

$$A = \{(1, 2, -1, -2), (2, 3, 0, -1)\}$$

(b) Nadopunite skup A do baze prostora $\mathcal{M}_{22}$.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Domaća zadaća

Zadatak 2.

Skup $S = \{x, y\}$ nadopunite do baze prostora $\mathbb{R}^4$, ako je $x = (1, 0, -1, 0)$ i $y = (2, 0, 1, 1)$, .

Zadatak 3.

Neka su u vektorskom prostoru V dani konačni skupovi $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Dokažite da je $[A] = [B]$ ako i samo ako vrijedi

$$a_i \in [B], \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

i

$$b_j \in [A], \forall j \in \{1, 2, \ldots, s\}.$$

Zadatak 4.

U prostoru $\mathbb{R}^3$ dani su vektori

$$a_1 = (1, 3, 1), a_2 = (1, 2, 1),$$

$$b_1 = (-1, 0, -1), b_2 = (-1, -1, -1).$$

Pokažite da vrijedi

$$[\{a_1, a_2\}] = [\{b_1, b_2\}].$$

Zadatak 5.

Pokažite da je skup

$$S = \{(1, 1, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 7), (6, 2, 13)\}$$

sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$ pa ga reducirajte do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 6.

Neka je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza u vektorskom prostoru V i $b = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i$ neki vektor iz V. Dokažite da je $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$ baza u V ako i samo ako je $b_i \neq 0$.

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V, kažemo da je M potprostor od V.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(i) $a + b \in M, \qquad \forall a, b \in M,$

(ii) $\alpha a \in M, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in M.$

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(i') $\alpha a + \beta b \in M, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in M.$

Zadatak 7.

Dokažite da su skupovi antisimetričnih i simetričnih matrica iz $\mathcal{M}_2$ vektorski potprostori od $\mathcal{M}_2$.

Zadatak 8.

Neka je $V = \mathcal{P}$, vektorski prostor realnih polinoma. Provjerite da li je W potprostor od V, ako:

(a) W sadrži sve polinome s cjelobrojnim koeficijentima;

(b) W sadrži sve polinome stupnja ≥ 6 i nul-polinom;

(c) W sadrži sve polinome u kojima se javljaju samo parne potencije od t.

Zadatak 9.

Neka je V vektorski prostor funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pokažite da je W potprostor od V ako je:

(a) $W = \{f(x) \ : \ f(1) = 0\}$;

(b) $W = \{f(x) \ : \ f(3) = f(1)\}$;

(c) $W = \{f(x) \ : \ f(-x) = -f(x)\}$.

Domaća zadaća

Zadatak 10.

Provjerite da li je W potprostor od $\mathbb{R}^3$ ako W sadrži sve vektore $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ takve da je:

(a) $x_1 = 3x_2$;

(b) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$;

(c) $x_1 \cdot x_2 = 0$;

(d) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

(e) $x_2 = x_1^2$;

(f) $x_1 = 2x_2 = 3x_3$.