Linearna algebra 1

Vježbe 6

1.4.2014.

Zadatak 1.

Neka su M i L međusobno različiti potprostori prostora V te neka vrijedi

$$\dim L = \dim M = 3, \quad \dim V = 4.$$

Dokažite da je

$$\dim(L \cap M) = 2.$$

Zadatak 2.

Neka su U i W različiti četvero-dimenzionalni potprostori vektorskog prostora V, gdje je $\dim V = 5$. Odredite moguće dimezije za $U \cap W$.

Domaća zadaća

Zadatak 3.

Neka su U i W potprostori vektorskog prostora V, takvi da je $\dim U = 4$, $\dim W = 5$ i $\dim V = 7$. Odredite moguće dimezije za $U \cap W$.

Zadatak 4.

Neka su M i L potprostori prostora V te neka vrijedi

$$\dim L = 4, \qquad \dim M = 2, \qquad \dim V = 5.$$

Dokažite: ili je $M \subseteq L$ ili je $M + L = V$.

Zadatak 5.

Neka su U i W sljedeći potprostori od $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \;:\; x_1 = x_2 = x_3\},$$

$$W = \{(0, x_2, x_3) \;:\; x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Pokažite da je $\mathbb{R}^3 = U \dot{+} W$.

Domaća zadaća

Zadatak 6.

Neka su U_1, U_2 i U_3 sljedeći potprostori od $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1 = x_3\},$$

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$U_3 = \{(0, 0, x_3) \ : \ x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Pokažite da je

(a) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$;

(b) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$;

(c) $\mathbb{R}^3 = U_2 + U_3$.

Koje su sume direktne?

Definicija

Neka je V vektorski prostor, te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L ako vrijedi

$$L \dot{+} M = V.$$

Zadatak 7.

Dokažite da je skup

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_1 - x_4\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^4$. Odredite mu neku bazu i dimenziju te jedan direktan komplement.

Zadatak 8.

Dokažite da je skup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : 2a - b - c = 0, a - b + 2c - d = 0 \right\}$$

potprostor od $\mathcal{M}_2$. Odredite mu neku bazu i dimenziju te jedan direktan komplement.

- V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan, M potprostor od V
- definiramo binarnu relaciju $\sim$ na V formulom

$$x \sim y \iff y - x \in M, \quad x, y \in V$$

- za $x \in V$ s $[x]$ označavamo klasu ekvivalencije određenu vektorom x, odnosno

$$[x] = \{y \in V \ : \ x \sim y\}$$

- x nazivamo reprezentantom ili predstavnikom ove klase ekvivalencije. Uočimo da se ista klasa $[x]$ može predočiti i drugim predstavnicima

$$[x] = [y] \iff x \sim y$$

- klase ekvivalencije za ovako uvedenu relaciju možemo i preciznije opisati:
  vrijedi
  $$[x] = x + M, \quad \forall x \in V,$$
  pri čemu $x + M$ označava skup $\{x + a \ : \ a \in M\}$

Definicija

Neka je M potprostor prostora V. Svaki skup oblika

$$x + M = \{x + a \ : \ a \in M\}, \quad x \in V,$$

naziva se linearna mnogostrukost u smjeru potprostora M. Skup svih linearnih mnogostrukosti u smjeru potprostora M označava se s V/M i naziva kvocijentni skup ili kvocijent (prostora V po potprostoru M).

- definirajmo zbrajanje klasa ekvivalencije (tj. linearnih mnogostrukosti) na sljedeći način:

$$[x] + [y] = [x + y], \quad x, y \in V$$

- za $\alpha \in \mathbb{F}$ i $[x] \in V/M$ definiramo

$$\alpha[x] = [\alpha x]$$

Zadatak 9.

Provjerite da je zbrajanje i množenje skalarom u kvocijentnom prostoru dobro definirano (tj. da definicija ne ovisi o izboru predstavnika klasa - linearnih mnogostrukosti).