Linearna algebra 1

Vježbe 7

8.4.2014.

Zadatak 1.

Služeći se vektorskom interpretacijom ispitajte rješivost sljedećih sustava:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & -1 \\ & & & & z & = & 3 \\ -2x & + & y & - & 2z & = & 4 \end{array}$$

Zadatak 2.

U ovisnosti o parametru $s \in \mathbb{R}$ ispitajte linearnu nezavisnost sljedećih skupova u $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(s^2 - s, 1, 0), (s^2 - 1, -1, 0)\}$;

(b) $\{(1 - s, 1, -3), (0, s - 1, -1), (1, s, 0)\}$.

Zadatak 3.

Neka je $\mathcal{P}$ vektorski prostor polinoma nad $\mathbb{R}$.

(a) Provjerite da li je skup $\{u, v, w\}$ linearno nezavisan ako je

$$u(t) = t^2 + 4t - 1,$$

$$v(t) = 2t^2 + 2t + 1,$$

$$w(t) = -4t^2 + 2t.$$

(b) Odredite k tako da je $z(t) = kt^2 + 2t + 4$ linearna kombinacija od $u(t)$ i $v(t)$.

(c) Odredite uvjete na a, b i c tako da je $z(t) = at^2 + bt + c$ linearna kombinacija od $u(t)$ i $v(t)$.

Zadatak 4.

Neka je $V = \mathbb{R}$. Definiramo binarnu operaciju “zbrajanja”

$$x \boxplus y = \max\{x, y\}, \quad \forall x, y \in V$$

i operaciju množenja sa skalarima

$$\alpha \boxdot x = \alpha x, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in V.$$

Skup V s ovako definiranim operacijama nije vektorski prostor. Provjerite koja svojstva iz definicije vektorskog prostora ne vrijede.

Zadatak 5.

Neka je V skup svih pozitivnih realnih brojeva. Definiramo binarnu operaciju "zbrajanja"

$$x \boxplus y = xy, \quad \forall x, y \in V$$

i operaciju množenja sa skalarima

$$\alpha \boxdot x = x^{\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in V.$$

Pokažite da je skup V s ovako definiranim operacijama vektorski prostor.

Zadatak 6.

Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{C}$ je skup $S = \{(\lambda + 1, 3, -1), (-2, \lambda^2, 2), (-1, -2.1)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{C}^3$? Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{C}$ je skup S baza od $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$? Sve odgovore obrazložite.

Zadatak 7.

Zadan je prostor

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(to jest prostor gornjetrokutastih matrica reda 2). Nadopunite skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

do baze za V.

Zadatak 8.

Je li skup

$$K = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ (AX)^T = A^T X \right\}, \quad \text{gdje je } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

potprostor vektorskog prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Ako jest, odredite mu bazu, dimenziju te bazu nekog direktnog komplementa. Ako nije, pokažite to konkretnim primjerom.

Zadatak 9.

Pokažite da je skup $M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \ : \ z_1 + iz_2 - z_3 = 0\}$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i nad $\mathbb{R}$ i odredite mu bazu i dimenziju u oba slučaja.

Zadatak 10.

U prostoru $\mathcal{M}_2$ zadani su potprostori:

$$L = \left[\left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right],$$

$$M = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right\}\right].$$

Odredite baze i dimenzije potprostora L, M, $L \cap M$ i $L + M$.