

Linearna algebra 1

Vježbe 8

15.4.2014.

Zadatak 1.

Dokažite sljedeće tvrdnje:

- a) Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ može imati najviše jedan inverz.
- b) Ako su $A, B \in \mathcal{M}_n$ regularne, regularan je i njihov umnožak AB te vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Zadatak 2.

Dokažite da je $GL(n, \mathbb{F})$ s binarnom operacijom množenja grupa.

Zadatak 3.

Za $A \in \mathcal{M}_n$ definiramo potenciranje matrica na sljedeći način:
 $A^0 = I$, $A^1 = A$ i, induktivno,

$$A^{k+1} = AA^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da vrijedi $A^k A^l = A^{k+l}$ i $(A^k)^l = A^{kl}$ za sve $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zadatak 4.

Izračunajte umnožak matrica:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 14 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix};$$

b) Domaća zadaća

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 5.

Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

odredite AB i BA . Što zaključujete o komutativnosti množenja matrica?

Zadatak 6.

Ako je

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad i \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

izračunajte $X^T Y$ i XY^T .

Zadatak 7.

Uvjerite se neposrednim množenjem da vrijedi $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 8.

Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

izračunajte

$$(A + C)^2 - 2BC + (A - 2B)(C - A).$$

Zadatak 9.

Izračunajte $f(A)$ ako je:

a) Domaća zadaća

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 4, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix};$$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$

Zadatak 10.

- a) Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Odredite matricu $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ takvu da vrijedi $AB = I$. Provjerite pritom da je $BA = I$.
- b) Domaća zadaća
- Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ odredite najopćenitiji oblik matrice B istog tipa za koju vrijedi $AB = 0$.

Zadatak 11.

Nadite sve 2×2 matrice koje komutiraju s matricom

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 12.

Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 13.

Izračunajte $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$.

Zadatak 14.

Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Dokažite da je

$$M = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AB = BA\}$$

potprostor od $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i odredite mu jednu bazu i dimenziju.