Linearna algebra 1

Vježbe 9

22.4.2014.

Zadatak 1.

Pokažite da dijagonalna matrica reda n s elementima $d_1, d_2, \ldots, d_n$ na dijagonali ima inverz ako i samo ako je $d_i \neq 0$, $\forall i$. Kako glasi njen inverz?

Zadatak 2.

Rastavite sljedeće matrice na **blok matrice** te ih pomnožite koristeći pravilo *redak puta stupac*:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 3.

Dokažite da svaka dva svojstva od navedena tri povlače treće:

(1) $A^T = A$ (A je simetrična.)

(2) $A^T A = AA^T = I$ (A je **ortogonalna**, tj. $A^T = A^{-1}$.)

(3) $A^2 = I$ (A je **involutorna**.)

Domaća zadaća

Zadatak 4.

Pokažite da jednakost

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

vrijedi onda i samo onda kad matrice A i B komutiraju.

`Domaća zadaća`

Zadatak 5.

Dokažite da je za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_n$ matrica AA^T simetrična.

Zadatak 6.

Pokažite da je matrica A ortogonalna:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 7.

Pokažite da je inverz gornjetrokutaste (donjetrokutaste) matrice također gornjetrokutasta (donjetrokutasta) matrica.

Zadatak 8.

Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ regularna matrica. Dokažite da je tada i A^T regularna te da vrijedi

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Zadatak 9.

Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ simetrična regularna matrica. Dokažite da je i A^{-1} simetrična.

Definicija 1.

Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je **nilpotentna** ako za neki pozitivni cijeli broj k vrijedi $A^k = 0$.

Zadatak 10.

Ako je N nilpotentna kvadratna matrica n-tog reda, pokažite da je $(I - N)$ regularna i da je

$$(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + \ldots + N^{k-1}.$$

Zadatak 11.

Trag kvadratne matrice je preslikavanje $\mathrm{tr}\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ definirano s

$$\mathrm{tr}([a_{ij}]) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Pokažite da vrijedi $\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B)$ za sve skalare α, β i sve kvadratne matrice A, B.

Zadatak 12.

Dokažite da za sve $A, B \in \mathcal{M}_n$ vrijedi

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Zadatak 13.

Neka je $X = \{A \in \mathcal{M}_n : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Pokažite da je X potprostor od $\mathcal{M}_n$ i odredite mu jednu bazu i dimenziju.

Definicija 2.

Za kompleksnu matricu $A = [a_{ij}]$ definiramo **konjugiranu matricu** $\overline{A} = [b_{ij}]$, gdje je $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$ kompleksno konjugirani broj broju a_{ij}. Također definiramo **adjungiranu matricu** A^* na način $A^* = (\overline{A})^T$. Za kompleksnu kvadratnu matricu kažemo da je **hermitska** ako vrijedi $A^* = A$, a **antihermitska** ako je $A^* = -A$.

Primjer 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & -3+2i & 5 \\ 0 & 3i & 21 \\ 6+4i & -7-5i & 9i \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 6-4i \\ -3-2i & -3i & -7+5i \\ 5 & 21 & -9i \end{bmatrix}$$

Zadatak 14.

Dokažite da za sve ulančane kompleksne matrice A i B vrijedi

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Domaća zadaća

Zadatak 15.

Za matricu A pronađite A^*, $(A^*)^*$, $(A^T)^*$ i $(A^*)^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1-i \\ 0 & 2 & 3+i \\ 1+i & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Definicija 3.

Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]$ je **normalna** ako je $AA^* = A^*A$, tj. komutira sa svojom adjungiranom matricom.

Zadatak 16.

Provjerite je li matrica A normalna matrica.

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 2+i \\ 4+i & 2-i \end{bmatrix}$$