PISMENI ISPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 2

Zadatak 1. [25 bodova]
Dokažite da je operator $F : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definiran s

$$F(A) = (2a_{11} - a_{12} + a_{21}, -2a_{12} - a_{21} + 4a_{22}, 4a_{11} + 3a_{21} - 4a_{22})$$

linearan, te mu odredite matrični prikaz u paru kanonskih baza. Nađite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora, te odredite rang i defekt.

Zadatak 2. [25 bodova]
Za matricu A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & b \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

odredite parametre a i b ako je poznato da je matrica A singularna, te da njezine svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 2. Odredite geometrijsku kratnost za svaku od svojstvenih vrijednosti, te odgovorite da li se A može dijagonalizirati.

Zadatak 3. [25 bodova]
Neka je $V = C[-1, 1]$ vektorski prostor sa skalarnim produktom definiranim s $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Neka je W prostor polinoma stupnja ≤ 3. Odredite ortogonalnu projekciju od $t^4 + 2t^2 + 1$ na W.

Zadatak 4. [25 bodova]
Dokažite: Neka je A kompleksni linearni operator takav da je $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x$. Tada je A hermitski operator.
Napomena: u dokazu koristite činjenicu da vrijedi : $\langle Ax, x\rangle = 0, \forall x \Rightarrow A = 0$.

Darija Marković