PISMENI ISPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 2

Zadatak 1. [25 bodova]
Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator zrcaljenja s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{a}_2 = \vec{j} + \vec{k}$. Odredite matrični prikaz ovog operatora u paru kanonskih baza. Nađite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora, te odredite rang i defekt.

Zadatak 2. [25 bodova]
Zadan je linearni operator na $\mathbb{R}^3$

$$A(x_1, x_2, x_3) = (-14x_1 + 26x_2 + 18x_3, -9x_1 + 17x_2 + 12x_3, 2x_1 - 4x_2 - 4x_3).$$

Odredite sve svojstvene vrijednosti, svojstvene potprostore, te algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti operatora A.
Ispitajte može li se operator dijagonalizirati. Ukoliko može, nađite bazu u kojoj se operator dijagonalizira i matrični prikaz u toj bazi. Ukoliko ne može detaljno obrazložite zašto ne može.

Zadatak 3. [25 bodova]
Neka je

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ : \ a + b - c - d = 0, \ a + c = 0 \right\}.$$

Nađite $L^\perp$, po jednu ortonormiranu bazu za L i $L^\perp$, te $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ prikažite u obliku $M = A + B$, $A \in L$, $B \in L^\perp$.

Zadatak 4. [25 bodova]
Dokažite: Svaki kompleksni linearni operator A može se na jedinstveni način prikazati u obliku $A = B + iC$, gdje su B i C hermitski operatori.

Darija Marković