PISMENI ISPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 2

Zadatak 1. [25 bodova]
Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator projekcije na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{a}_2 = \vec{i} + \vec{k}$. Odredite matrični prikaz ovog operatora u paru kanonskih baza. Nađite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora, te odredite rang i defekt.

Zadatak 2. [25 bodova]
Ortonormirajte skup vektora $\{c_1, c_2, c_3\}$ iz $\mathbb{C}^3$, ako je $c_1 = (0, 1 - i, 1 + i)$, $c_2 = (2 + 2i, 3i, -4 - i)$ i $c_3 = (2 + 6i, 3, -1 + i)$. Pronađite ortogonalnu projekciju vektora $c = (2 + 5i, 2i, -4i)$ na prostor $[\{c_1, c_2\}]$.

Zadatak 3. [25 bodova]
Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a-2 & -3 \\ b+1 & -5 & -7 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

odredite parametre a i b ako je poznato da je A singularna i da jedna njezina svojstvena vrijednost ima algebarsku kratnost 2. Za dobivene parove parametara odredite svojstvene i minimalne polinome pripadnih matrica.

Zadatak 4. [25 bodova]
Dokažite: Neka je A realni linearni operator takav da je $\langle Ax, x \rangle = 0$, $\forall x$. Tada je A antisimetrični operator.

Darija Marković