A

1. Linearni operator $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojim djelovanjem na komponente vektora $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ tako da je
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_4, 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + x_3 - x_4)^T.$$
Odredite matricu A operatora T u paru kanonskih baza, te matricu A' koja je pridružena operatoru u paru baza (e', f') gdje je $\vec{e_1'} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\vec{e_2'} = (0, 1, 2, 3)^T$, $\vec{e_3'} = (0, 0, 1, 2)^T$, $\vec{e_4'} = (0, 0, 0, 1)^T$ i $\vec{f_1'} = (1, 1, 0)^T$, $\vec{f_2'} = (0, 1, 1)^T$, $\vec{f_3'} = (1, 0, 1)^T$.

2. Odredite nul-potprostor i sliku matrica A i A' iz prvog zadatka. Objasnite vezu ovih prostora.

3. Odredite svojstveni polinom, svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i svojstvene potprostore matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Odredite matricu koja pripada adjungiranom operatoru T^* operatora T kojem u kanonskoj bazi pripada matrica A
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$
u bazi (e') ako je $\vec{e_1'} = (1, 1)^T$ i $\vec{e_2'} = (-1, 2)^T$.

5. Ispitajte definitnost kvadatne forme
$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 2yz + z^2,$$
te pronađite ortonormalnu promjenu koordinata koja ju dijagonalizira.

BONUS ZADATAK: Odredite barem jednu simetričnu matricu (različitu od dijagonalne) kojoj su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 4$.

B

1. Linearni operator $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojim djelovanjem na komponente vektora $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ tako da je
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, x_2 - x_3 + 2x_4, x_1 + x_2 + 2x_4)^T.$$
Odredite matricu A operatora T u paru kanonskih baza, te matricu A' koja je pridružena operatoru u paru baza (e', f') gdje je $\vec{e_1'} = (4,3,2,1)^T$, $\vec{e_2'} = (3,2,1,0)^T$, $\vec{e_3'} = (2,1,0,0)^T$, $\vec{e_4'} = (1,0,0,0)^T$ i $\vec{f_1'} = (0,1,1)^T$, $\vec{f_2'} = (1,1,0)^T$, $\vec{f_3'} = (1,0,1)^T$.

2. Odredite nul-potprostor i sliku matrica A i A' iz prvog zadatka. Objasnite vezu ovih prostora.

3. Odredite svojstveni polinom, svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i svojstvene potprostore matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Odredite matricu koja pripada adjungiranom operatoru T^* operatora T kojem u kanonskoj bazi pripada matrica A
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
u bazi (e') ako je $\vec{e_1'} = (1,1)^T$ i $\vec{e_2'} = (2,-1)^T$.

5. Ispitajte definitnost kvadatne forme
$$q(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 - 2yz,$$
te pronađite ortonormalnu promjenu koordinata koja ju dijagonalizira.

BONUS ZADATAK: Odredite barem jednu simetričnu matricu (različitu od dijagonalne) kojoj su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = 4$.