Pismeni dio ispita iz Linearne algebre II

9. veljače 2011.

1. **[25 bod.]** Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadan je svojim djelovanjem na komponente vektora $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ tako da je

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_3, x_1 - 2x_2, -x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3)^T.$$

Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi, te u bazi $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$, gdje je $\vec{e_1'} = (1, 1, 1)^T$, $\vec{e_2'} = (1, 0, 1)^T$, $\vec{e_3'} = (1, 0, 0)^T$. Baza prostora $\mathbb{R}^4$ je u oba slučaja kanonska. Odredite sliku i nul-potprostor operatora.

2. **[15 bod.]** Ispitajte može li se operator

$$F(x, y, z) = (-8x - 5y + z, 12x + 8y - 2z, -12x - 5y + 5z)^T$$

dijagonalizirati. Ukoliko može navedite bazu u kojoj se dijagonalizira.

3. **[10 bod.]** Neka je N normalan operator. Dokažite da je tada i operator $N + \lambda I$ je normalan.

4. **[25 bod.]** Odredite svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore, svojstvene potprostore, te svojstveni i minimalni polinom matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. **[25 bod.]** Odredite Jordanovu formu matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$