Pismeni dio ispita iz Linearne algebre II

6. veljače 2013.

1. **[25 bod.]** Linearni operator $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojim djelovanjem na komponente vektora $x \in \mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tako da je

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4, -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4).$$

Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi, te u paru baza $(e'), (f')$, gdje je $e'_1 = (1,1,1,1)$, $e'_2 = (1,1,1,0)$, $e'_3 = (1,1,0,0)$, $e'_4 = (1,0,0,0)$ i $f'_1 = (0,0,1)$, $f'_2 = (0,1,2)$, $f'_3 = (1,2,3)$. Odredite sliku i jezgru operatora.

2. **[25 bod.]** Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem odredite inverz matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. **[25 bod.]** U unitarnom prostoru M_2 zadan je potprostor L svojom bazom

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Odredite $L^\perp$, te prikažite $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ u obliku $X = A + B$, $A \in L$, $B \in L^\perp$.

4. **[25 bod.]** Koristeći ortonormalnu promijenu baze dijagonalizirajtre simetričnu matricu A:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -4 \\ -6 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$