Pismeni dio ispita iz Linearne algebre II

18. veljače 2013.

1. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Linearni operator $F : M_2 \to M_2$ definiran je sljedećom formulom

$$F(X) = XM - MX,$$

gdje je $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Odredite matricu A operatora F u kanonskoj bazi, te u bazi (E'), gdje je $E'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $E'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Odredite sliku i jezgru operatora.

2. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Odredite svojstveni polinom, svojstvene vrijednosti i vektore, te svojstvene potprostore matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Moželi se matrica A dijagonalizirati?

3. $[\mathbf{25\ bod.}]$ U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ zadan je potprostor L svojom bazom

$$\{(1,2,0,1), (3,2,1,2), (1,-2,1,0)\}.$$

Odredite $L^{\perp}$, te prikažite $x = (1,2,3,4)$ u obliku $x = a + b$, $a \in L$, $b \in L^{\perp}$.

4. (a) $[\mathbf{10\ bod.}]$ Neka je T normalan operator. Pokažite da je i operator $T + \lambda I$ normalan.
   Napomena: operator B je normalan ako vrijedi $BB^* = B^*B$.

   (b) $[\mathbf{15\ bod.}]$ Neka je A kompleksna regularna matrica reda n. Pokažite da je $H = A^*A$ hermitska pozitivno definitna matrica.
   Napomena: matrica B je pozitivno definitna ako vrijedi $x^*Bx > 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$.