Pismeni dio ispita iz Linearne algebre II

13. lipnja 2011.

1. **[25 bod.]** Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadan je svojim djelovanjem na komponente vektora $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tako da je

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - 2x_2, x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3).$$

   Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi, te u bazi $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$, gdje je $\vec{e_1'} = (1,1,1)$, $\vec{e_2'} = (1,0,1)$, $\vec{e_3'} = (1,0,0)$. Baza prostora $\mathbb{R}^4$ je u oba slučaja kanonska. Odredite sliku i nul-potprostor operatora.

2. **[15 bod.]** Odredite simetričnu matricu A ako su $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ njene svojstvene vrijednosti, a $\vec{v_2} = (1,1,0)$ i $\vec{v_3} = (-1,0,1)$ svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

3. **[10 bod.]** Neka je N normalan operator. Dokažite da je tada i operator $N + \lambda I$ je normalan.

4. **[25 bod.]** Odredite svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore, svojstvene potprostore, te svojstveni i minimalni polinom matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. **[25 bod.]** Odredite Jordanovu formu matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$