Pismeni dio ispita iz Linearne algebre II

19. lipnja 2013.

1. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Pokažite da je preslikavanje $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definirano sljedećom formulom

$$F(p) = p' + 2p,$$

linearni operator. Odredite matricu A operatora F u kanonskoj bazi, te u bazi (e'), gdje je $e'_1 = 1 + t$, $e'_2 = t + t^2$, $e'_3 = t^2 + t^3$, $e'_4 = t^3$.

2. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Za matricu A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 4 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

odredite parametre a i b ako je poznato da je matrica A singularna, te da njezine svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 2. Odredite geometrijsku kratnost za svaku od svojstvenih vrijednosti, te odgovorite da li se A može dijagonalizirati.

3. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Za vektore $a = (2, 0, 1, 3)$, $b = (2, -1, 3, 7)$ i $c = (0, -1, 2, 4)$ iz $\mathbb{R}^4$ i potprostor $M = [\{a, b, c\}]$ odredite ortonormirane baze za M i $M^\perp$.

4. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Dokažite da skup svih ortogonalnih matrica čini grupu s obzirom na matrično množenje. Da li je grupa komutativna?