Pismeni dio ispita iz Linearne algebre II

1. rujna 2011.

1. **[20 bod.]** Linearni operator $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadan je svojim djelovanjem na komponente vektora $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tako da je
$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -2x_1 + 3x_2 - 2x_3).$$
Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi, te u paru baza $(e'), (f')$, gdje je $\vec{e'_1} = (1, 1, 1)$, $\vec{e'_2} = (0, 1, 1)$, $\vec{e'_3} = (0, 0, 1)$ i $\vec{f'_1} = (3, 1)$, $\vec{f'_2} = (5, 2)$. Odredite sliku i nul-potprostor operatora.

2. **[15 bod.]** Ispitajte može li se operator $G(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$ dijagonalizirati. Ukoliko može navedite bazu u kojoj se dijagonalizira.

3. Neka je N normalan operator. Dokažite:
   (a) **[10 bod.]** operator $N + \lambda I$ je normalan;
   (b) **[10 bod.]** svojstveni vektori operatora N koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno su ortogonalni.

4. **[20 bod.]** Odredite svojstveni i minimalni polinom matrice A:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. **[25 bod.]** Odredite Jordanovu formu matrice A:
$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 8 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$