Pismeni dio ispita iz Linearne algebre II

15. rujna 2011.

1. **[20 bod.]** Linearni operator $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojim djelovanjem na komponente vektora $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tako da je

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4, 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4, x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4).$$

Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi, te u paru baza $(e'), (f')$, gdje je $\vec{e_1'} = (1, 0, 1, 1), \vec{e_2'} = (0, 0, 1, 0), \vec{e_3'} = (-1, 1, -1, -1), \vec{e_4'} = (1, 2, 0, 0)$ i $\vec{f_1'} = (1, 1, 0)$, $\vec{f_2'} = (0, 1, 1)$, $\vec{f_3'} = (1, 0, 1)$. Odredite sliku i nul-potprostor operatora.

2. **[15 bod.]** Odredite simetričnu matricu B ako su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ njene svojstvene vrijednosti, a $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$ i $\vec{v_3} = (2, -1, 0)$ svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

3. **[20 bod.]** Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem odredite inverz matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 & 8 \\ -5 & -2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. **[20 bod.]** Odredite svojstveni i minimalni polinom matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. **[25 bod.]** Odredite Jordanovu formu matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$