Pismeni dio ispita iz Linearne algebre II

4. rujna 2013.

1. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Pokažite da je preslikavanje $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definirano sljedećom formulom

$$F(p) = 2p' - p,$$

linearni operator. Odredite matricu A operatora F u kanonskoj bazi, te u bazi (e'), gdje je $e'_1 = 1 + t^2$, $e'_2 = t + t^2$, $e'_3 = t + t^3$, $e'_4 = t^3$, te jezgru i sliku operatora F.

2. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Za matricu A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

odredite za koje vrijednosti parametra a je ona regularna. Za dopustive a odredite inverz matrice koristeći se Hamilton-Cayleyevim teoremom.

3. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Nađite ortogonalnu projekciju y i ortogonalnu komponentu z vektora $x = (2, -1, -4, 7)$ na potprostor L ako je

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\ :\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4 = 0, x_1+2x_2+2x_3+3x_4 = 0, -9x_1+2x_2+2x_3+x_4 = 0\}.$$

4. $[\mathbf{25\ bod.}]$ Zadan je linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ svojim prikazom u kanonskoj bazi

$$[A]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je A hermitski operator i nađite ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojem je matrica operatora dijagonalna.