Linearna algebra II

Darija Marković

www.mathos.unios.hr/la2

Linearni operatori

- fiksirajmo po volji odabran kut $\varphi \in [0, 2\pi)$ i promotrimo preslikavanje $R_\varphi : V^2(0) \to V^2(0)$ koje svaki radijvektor rotira za φ. Preslikavanje R_φ nazivamo operatorom rotacije za kut φ.

Osnovna svojstva linearnih operatora

Definicija 5.1.1.

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$.
Preslikavanje $A : V \to W$ zove se linearan operator ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \qquad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Osnovna svojstva linearnih operatora

Napomena 5.1.2.

(a) Definiciona jednakost

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \qquad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

naziva se linearnost preslikavanja A. Odavde odmah slijedi

$$A(x + y) = Ax + Ay, \qquad \forall x, y \in V$$

(ako se uzme $\alpha = \beta = 1$), te

$$A(\alpha x) = \alpha Ax, \qquad \forall x \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$$

(ako se uzme $\beta = 0$). Ova se svojstva zovu aditivnost i homogenost. Dakle, svaki je linearan operator aditivno i homogeno preslikavanje.

Osnovna svojstva linearnih operatora

(b) Svaki linearan operator nulvektor prevodi u nulvektor:

$$A0 = 0.$$

Osnovna svojstva linearnih operatora

(b) Svaki linearan operator nulvektor prevodi u nulvektor:

$$A0 = 0.$$

(c) Ako je $A : V \to W$ linearan operator, jednostavnim induktivnim argumentom pokazuje se da tada vrijedi i

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A x_i, \qquad \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in V, \\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}. \end{array}$$

Često se zato kaže da linearni operatori poštuju linearne kombinacije. Ovo svojstvo pokazuje da je djelovanje linearnih operatora u punoj mjeri usklađeno s algebarskom strukturom vektorskih prostora.

Primjer 5.1.3.

1. Rotacija $R_\varphi : V^2(0) \to V^2(0)$ za kut φ je linearan operator na prostoru $V^2(0)$.

Osnovna svojstva linearnih operatora

Primjer 5.1.3.

1. Rotacija $R_\varphi : V^2(0) \to V^2(0)$ za kut φ je linearan operator na prostoru $V^2(0)$.
2. Preslikavanje $P : V^3(0) \to V^3(0)$ definirano s

$$P(\overrightarrow{OT}) = \overrightarrow{OT'},$$

   gdje je $T = (x, y, z)$ i $T' = (x, y, 0)$, je linearan operator; P se naziva ortogonalni projektor prostora $V^3(0)$ na $V^2(0)$ (pri čemu smo prostor $V^2(0)$ identificirali s potprostorom od $V^3(0)$ kojeg čine svi radijvektori čije završne točke leže u $xy-$ravnini).

Osnovna svojstva linearnih operatora

3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0),$$

je linearan operator. Može se uočiti da je ovaj operator apstraktna realizacija ortogonalnog projektora P iz prethodnog primjera.

Osnovna svojstva linearnih operatora

3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0),$$

   je linearan operator. Može se uočiti da je ovaj operator apstraktna realizacija ortogonalnog projektora P iz prethodnog primjera.

4. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2),$$

   je linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0),$$

   je linearan operator. Može se uočiti da je ovaj operator apstraktna realizacija ortogonalnog projektora P iz prethodnog primjera.

4. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2),$$

   je linearan operator.

5. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2 + 5),$$

   nije linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

6. Transponiranje matrica $T : M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F})$,

$$T(A) = A^T,$$

   je linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

6. Transponiranje matrica $T : M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F})$,
$$T(A) = A^T,$$
je linearan operator.
7. Hermitsko adjungiranje matrica $H : M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{nm}(\mathbb{C})$,
$$H(A) = A^*,$$
nije linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

6. Transponiranje matrica $T : M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F})$,

$$T(A) = A^T,$$

   je linearan operator.

7. Hermitsko adjungiranje matrica $H : M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{nm}(\mathbb{C})$,

$$H(A) = A^*,$$

   nije linearan operator.

8. $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

6. Transponiranje matrica $T : M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F})$,
$$T(A) = A^T,$$
je linearan operator.
7. Hermitsko adjungiranje matrica $H : M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{nm}(\mathbb{C})$,
$$H(A) = A^*,$$
nije linearan operator.
8. $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je linearan operator.
9. $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ nije linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

10. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3,$$

je linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

10. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3,$$

    je linearan operator.

11. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zadani realni brojevi. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

    je linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

10. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3,$$

je linearan operator.

11. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zadani realni brojevi. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

je linearan operator.

12. $D : P_n \to P_n$,

$$Dp = p',$$

pri čemu je p' derivacija polinoma p, je linearan operator.

13. Neka su V i W proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je preslikavanje $0 : V \to W$, definirano s

$$0x = 0, \qquad \forall x \in V,$$

linearan operator. Ovaj operator se naziva nuloperator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

13. Neka su V i W proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je preslikavanje $0 : V \to W$, definirano s

$$0x = 0, \qquad \forall x \in V,$$

linearan operator. Ovaj operator se naziva nuloperator.

14. Neka je V proizvoljan vektorski prostor. Identitet $I : V \to V$ je linearan operator. Često se kaže da je I jedinični operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

13. Neka su V i W proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je preslikavanje $0 : V \to W$, definirano s
$$0x = 0, \qquad \forall x \in V,$$
linearan operator. Ovaj operator se naziva nuloperator.
14. Neka je V proizvoljan vektorski prostor. Identitet $I : V \to V$ je linearan operator. Često se kaže da je I jedinični operator.
15. $D : P \to P$,
$$Dp = p',$$
je linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

16. $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots),$$

je linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

16. $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots),$$

    je linearan operator.

17. $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots),$$

    je linearan operator.

Osnovna svojstva linearnih operatora

Napomena 5.1.4.

Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza prostora V. Uzmimo proizvoljan $x \in V$ i napišimo ga u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i.$$

Sada je, prema napomeni 5.1.2.(c),

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i.$$

Odavde zaključujemo: poznajemo li vektore $Ab_1, \ldots, Ab_n$, onda implicitno poznajemo i Ax, za svaki vektor x iz domene.