Linearna algebra II

14.10.2014.

Propozicija 5.1.5. (Zadavanje na bazi i proširenje po linearnosti).

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V i $(w_1, \ldots, w_n)$ bilo koja uređena $n-$torka vektora iz W. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : V \to W$ takav da je

$$Ab_i = w_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Osnovna svojstva linearnih operatora

Propozicija 5.1.5. (Zadavanje na bazi i proširenje po linearnosti).

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V i $(w_1, \ldots, w_n)$ bilo koja uređena $n-$torka vektora iz W. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : V \to W$ takav da je

$$Ab_i = w_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Propozicija 5.1.6.

Neka je $A : V \to W$ linearan operator.

(i) Ako je $L \leq V$, onda je $A(L) \leq W$.

(ii) Ako je $M \leq W$, onda je $A^{-1}(M) \leq V$.

Osnovna svojstva linearnih operatora

Definicija 5.1.7.

Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Potprostori

$$\mathrm{Im}A = A(V) = \{Av \ : \ v \in V\} \leq W$$

i

$$\mathrm{Ker}A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \ : \ Ax = 0\} \leq V$$

zovu se slika, odnosno jezgra operatora A. Kad su V i W konačnodimenzionalni, rang i defekt operatora A definiraju se kao brojevi

$$\mathrm{r}(A) = \dim(\mathrm{Im}A),$$

odnosno

$$\mathrm{d}(A) = \dim(\mathrm{Ker}A).$$

Osnovna svojstva linearnih operatora

Napomena 5.1.8.

Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, bilo koja baza prostora V. Sada za proizvoljan

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V$$

imamo

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i,$$

što pokazuje da je skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ sustav izvodnica za $\mathrm{Im} A$. Vrijedi, dakle,

$$\mathrm{Im} A = [\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}] \quad \text{i} \quad \mathrm{r}(A) = \dim(\mathrm{Im} A) \leq n.$$

Propozicija 5.1.9.

Linearan operator $A : V \to W$ je injekcija ako i samo ako je

$$\mathrm{Ker} A = \{0\}$$

(tj. ako i samo ako je $\mathrm{d}(A) = 0$).

Osnovna svojstva linearnih operatora

Propozicija 5.1.9.

Linearan operator $A : V \to W$ je injekcija ako i samo ako je

$$\mathrm{Ker} A = \{0\}$$

(tj. ako i samo ako je $\mathrm{d}(A) = 0$).

Propozicija 5.1.10.

Neka je $A : V \to W$ linearan operator. A je injekcija ako i samo ako je za svaki linearno nezavisan skup S u V skup

$$A(S) = \{Ax \ : \ x \in S\}$$

linearno nezavisan u W.

Osnovna svojstva linearnih operatora

Teorem 5.1.11 (Teorem o rangu i defektu)

Neka je $A : V \to W$ linearan operator, te neka je $\dim V < \infty$. Tada je

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V.$$