

Linearna algebra 2

Vježbe 1

9.10.2014.

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$.

Preslikavanje $A : V \rightarrow W$ zove se **operator**.

Za operator A kažemo da je **aditivan** ako za sve $x, y \in V$ vrijedi

$$A(x + y) = Ax + Ay.$$

Za operator A kažemo da je **homogen** ako za sve $x \in V$ i sve $\alpha \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$A(\alpha x) = \alpha Ax.$$

Za operator A kažemo da je **linearan** ako za sve $x, y \in V$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Zadatak 1.

Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

- (a) $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je linearan operator.
- (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ i $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay$.
- (c) A je aditivan i homogen.

Zadatak 2.

Ako je $A : V \rightarrow W$ aditivan operator, dokažite da je tada $A(0) = 0$ i $A(-x) = -A(x)$, $\forall x \in V$.

Zadatak 3.

Neka je operator $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiran s

$$F(x, y, z) = (yz, x^2).$$

Odredite:

(a) $F(2, 3, 4)$.

(b) $F(5, -2, 7)$.

(c) $F^{-1}(0, 0)$, tj. sve vektore $v \in \mathbb{R}^3$ takve da je $F(v) = 0$.

Domaća zadaća

Zadatak 4.

Neka je operator $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiran s

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z).$$

Odredite $G^{-1}(3, 4)$.

Zadatak 5.

Neka je operator $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiran s $F(x, y) = (3y, 2x)$.
Neka je S jedinična kružnica u $\mathbb{R}^2$.

- (a) Opišite $F(S)$.
- (b) Odredite $F^{-1}(S)$.

Domaća zadaća

Zadatak 6.

Neka je operator $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiran s
 $F(x, y) = (3x + 5y, 2x + 3y)$ i neka je S jedinična kružnica u $\mathbb{R}^2$.
Odredite

- (a) sliku od S ($F(S)$).
- (b) prasluku od S ($F^{-1}(S)$).

Zadatak 7.

Da li su sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x + 3, 2y, x + y)$.

(b) $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $G(x, y) = (2x, x - y, y + x)$.

(c) $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $H(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.

(d) $J : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $J(z) = |z|^2$.

(e) $K : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $K(z) = \bar{z}$.

Napomena: U zadnja tri podzadatka provjerite postoji li razlika u zaključku ako $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ promatramo kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, odnosno nad poljem $\mathbb{R}$.

Domaća zadaća

Zadatak 8.

Da li su sljedeća preslikavanja linearni operatori:

- (a) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y, z) = 2x - 3y + 4z.$
- (b) $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, G(x, y) = (x + 1, 2y, x + y).$