*ODJEL ZA MATEMATIKU*
*SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU* *6. rujna 2012.*

**PISMENI ISPIT IZ ALGEBRE**

1. Neka je $G$ grupa i $g \in G$ element konačnog reda. Dokažite da za svaki $x \in G$ elementi $g$ i $xgx^{-1}$ imaju isti red. Ako $G$ sadrži točno jedan element reda 2, dokažite da je onda $xg = gx$, $\forall x \in G$.

2. Neka su $G, H$ grupe i $\varphi : G \to H$ homomorfizam grupa.
   (i) Dokažite da je $\operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq G$ i $\operatorname{Im}\varphi \leq H$.
   (ii) Ako je $\varphi$ netrivijalan homomorfizam, a $|G| = 24$ i $|H| = 15$, odredite $|\text{Ker}\varphi|$ i $|\text{Im}\varphi|$.

3. Neka je $R$ komutativan prsten. Element $r \in R$ je nilpotentan ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $r^n = 0$. Označimo sa $\mathcal{N}(R)$ skup svih nilpotentnih elemenata prstena $R$.
   (i) Dokažite da je $\mathcal{N}(R)$ ideal u $R$.
   (ii) Za $R = \mathbb{Z}_8$ odredite $\mathcal{N}(R)$ i elemente kvocijentnog prstena $R/\mathcal{N}(R)$.

4. Dokažite da konačno polje ne može biti algebarski zatvoreno.

5. Odredite Galoisovu grupu $G$ polinoma $p(x) = x^4 + 9x^2 + 4$ nad $\mathbb{Q}$ i sve podgrupe grupe $G$. Kojoj je grupi izomorfna grupa $G$?

**Napomena.** Sve svoje tvrdnje obrazložite.

*Mirela Jukić Bokun*