

PISMENI ISPIT IZ ALGEBRE

1. Neka je

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Provjerite je li S uz standardno množenje matrica podgrupa od $GL_3(\mathbb{R})$. Ako jeste, provjerite je li izomorfna grupi $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, gdje je $+$ zbrajanje po komponentama.

2. Neka je G grupa i $Z(G)$ centar grupe G . Ako je $G/Z(G)$ ciklička grupa, dokažite da je tada G Abelova grupa.
3. Neka je R prsten sa svojstvom da postoji prirodan broj n takav da vrijedi $r^n = r$, za sve $r \in R$. Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je n neparan broj, onda je karakteristika prstena R produkt različitih prostih brojeva.
4. Neka je R komutativan prsten s jedinicom. Ako je I ideal u R dokažite da je, za svaki $a \notin I$, $I + aR$ ideal u R . Ako je pravi ideal I maksimalan u R , dokažite da za svaki $a \notin I$ postoji $a' \in R$ takav da vrijedi $1 + aa' \in I$.
5. Odredite $[\mathbb{Q}(\sqrt[12]{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})]$. Koji polinom je minimalni polinom od $\alpha = \sqrt[12]{3}$ nad $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$?

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.

Mirela Jukić Bokun