ODJEL ZA MATEMATIKU
SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU *5. srpnja 2012.*

PISMENI ISPIT IZ ALGEBRE

1. Neka je N normalna podgrupa grupe G takva da je kvocijentna grupa G/N reda n. Dokažite da vrijedi:
   (i) $x^n \in N$, $\forall x \in G$,
   (ii) Ako je $x \in G$ i $x^k \in N$ za neki $k \in \mathbb{N}$ koji je relativno prost sa n, onda je $x \in N$.
2. Neka je G grupa. Ako za fiksan $g \in G$ definiramo preslikavanje $f_g : G \to G$ sa $f_g(x) = gxg^{-1}$ provjerite je li f_g automorfizam. Dokažite da je preslikavanje $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ zadano s $\varphi(g) = f_g$ homomorfizam i odredite mu jezgru.
3. Neka je R komutativan prsten s jedinicom. Dokažite da je P prost ideal u R ako i samo ako je kvocijentni prsten R/P integralna domena.
4. Neka je R prsten. Na skupu $\mathbb{Z} \times R$ definirajmo operaciju $+$ po komponentama i operaciju $\cdot$ na sljedeći način:
$$(z_1, r_1) \cdot (z_2, r_2) = (z_1 z_2, r_1 r_2 + z_2 r_1 + z_1 r_2), \quad \forall (z_i, r_i) \in \mathbb{Z} \times R,\ i = 1, 2.$$
   Dokažite da je $\mathbb{Z} \times R$ uz ovako definirane operacije prsten s jedinicom. Je li taj prsten ili neki njegov potprsten izomorfan prstenu R?
5. Odredite stupanj proširenja polja $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{5})$ nad $\mathbb{Q}$ te provjerite ima li polinom $f(x) = x^7 + 10x^2 - 5$ nultočki u $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{5})$.

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.

Mirela Jukić Bokun