

PISMENI ISPIT IZ ALGEBRE

1. Pokažite da je skup

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$$

uz matrično množenje grupa. Dokažite da je G izomorfna grupi \mathbb{C}^* .

2. Neka je N normalna podgrupa grupe G . Ako su N i G/N p -grupe, dokažite da je red svakog elementa grupe G potencija broja p .
3. Neka je S potprsten prstena R i I ideal u R .
- (i) Dokažite da je $S + I = \{x + y : x \in S, y \in I\}$ potprsten od R , a $S \cap I$ ideal u S .
- (ii) Definirajmo preslikavanje $\varphi : S \rightarrow (S + I)/I$ sa $\varphi(s) = s + I$, $s \in S$. Dokažite da je φ homomorfizam prstena i odredite mu jezgru.
4. Neka je R komutativan prsten s jedinicom. Dokažite da $r \in R$ ima multiplikativni inverz ako i samo ako r nije sadržan ni u jednom pravom idealu prstena R .
5. Provjerite je li $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5}, \sqrt{20})$ jednostavno proširenje polja \mathbb{Q} i odredite neku bazu za F .

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.

Mirela Jukić Bokun