

PISMENI ISPIT IZ ALGEBRE

1. Ako je M ciklička grupa reda m , N ciklička grupa reda n i $(m, n) = 1$, dokažite da je $M \times N$ ciklička grupa reda mn . Je li uvjet $(m, n) = 1$ nužan?
2. Neka je G grupa i $H \trianglelefteq G$ takva da je $g^2 \in H, \forall g \in G$. Dokažite da je G/H Abelova grupa.
3. Na intervalu realnih brojeva $I = \langle 0, +\infty \rangle$ definirajmo operacije \oplus i \otimes na sljedeći način:

$$a \oplus b = ab, \quad a \otimes b = a^{\ln b}, \quad \forall a, b \in I.$$

Dokažite da je struktura (I, \oplus, \otimes) polje i ispitajte je li ono izomorfno polju realnih brojeva.

4. Neka je $\varphi : R \rightarrow S$ homomorfizam komutativnih prstena s jedinicom. Ako je P prost ideal u S , dokažite da je $\varphi^{-1}(P)$ prost ideal u R .
5. Neka je L polje cijepanja polinoma $f(x) = x^4 - 5$. Odredite jednu bazu za L nad \mathbb{Q} i nađite $\text{Aut}_{\mathbb{Q}(i)} L$.

Napomena: Sve svoje tvrdnje obrazložite.