Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
23. studenog 2012.

1. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju linearne zavisnosti vektora iz vektorskog prostora* X_0.
(b) *Ispitajte linearnu zavisnost vektora* $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -7\vec{i} - 3\vec{j} + 16\vec{k}$. *Ako su linearno zavisni, jedan od njih prikažite kao linearnu kombinaciju ostalih.*
Rješenje: *(b)* $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Definirajte normu na vektorskom prostoru* X_0.
(b) *Za vektore* $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ *odredite* $\|\vec{a} \times \vec{b}\|_2$. *Što geometrijski predstavlja dobivena veličina ?*
Rješenje: *(b)* $\vec{a} \times \vec{b} = -9\vec{i} + 8\vec{j} - 12\vec{k}$, $\|\vec{a} \times \vec{b}\|_2 = 17$

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Napišite Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost.*
(b) *Neka su* $x, y, z \in [-\frac{1}{4}, \infty)$ *takvi da je* $x + y + z = 1$. *Dokažite da je tada*

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}\,.$$

Kada u prethodnoj nejednakosti vrijedi jednakost?
Rješenje: *(b)* $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Definirajte skalarni produkt na vektorskom prostoru* X_0.
(b) *Zadani su vrhovi trokuta u prostoru* $A = (-1, -3, -2)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (3, 2, 3)$. *Uz koji vrh trokuta se nalazi najveći kut ?*
Rješenje: *(b) Kako je* $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$, *najveći kut nalazi se pri vrhu B*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Neka su* $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$ *linearno nezavisni. Pokažite da je* $\vec{b}' = \vec{b} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \neq \vec{0}$ *i da je kut između vektora* $\vec{b}$ *i* $\vec{b}'$ *šiljasti.*
Rješenje: *Vidi nastavne materijale.*

Zadatak 6. [20 bodova]
U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ *diskutirajte rješenje sustava*

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Rješenje: $D = -4 + \lambda^2$, $D_1 = -8 + 2\lambda$, $D_2 = -4 + 4\lambda$. *Za* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ *sustav ima jedinstveno rješenje, a za* $\lambda \in \{-2, 2\}$ *sustav nema rješenje*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim kolokvijima.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
23. studenog 2012.

1. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju linearne nezavisnosti vektora iz vektorskog prostora* X_0.
(b) *Zadan je četverokut* $ABCD$*, pri čemu je* $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$*. Prikazite usmjerenu dužinu* $\overrightarrow{BC}$ *pomoću usmjerenih dužina* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{AD}$.
Rješenje: *(b)* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Definirajte metriku* d *na skupu svih točaka u prostoru.*
(b) *Neka je* $A = (2,1)$ *i* $\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^2 \colon d(A,X) = 2\}$*. Što geometrijski predstavlja skup* $\mathcal{S}$ *? Skicirajte sliku!*
Rješenje: *(b)* $\mathcal{S}$ *je kružnica u ravnini sa središtem u točki* A *radijusa* 2

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Napišite Hölderovu nejednakost.*
(b) *Neka su* $x, y, z \in [-\frac{1}{3}, \infty)$ *takvi da je* $x + y + z = 4$*. Dokažite da je tada*

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{3z+1} \leq 3\sqrt{5}\,.$$

Kada u prethodnoj nejednakosti vrijedi jednakost?
Rješenje: *(b)* $(x,y,z) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Definirajte skalarni produkt na vektorskom prostoru* X_0.
(b) *Kakav kut zatvaraju vektori* $\vec{a} = -4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ *i* $\vec{b} = -\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ *?*
Rješenje: *(b) Kako je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = -27 < 0$*, vektori zatvaraju tupi kut.*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Odredite vektorsku projekciju* $\vec{b}'$ *vektora* $\vec{b} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ *na vektor* $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.
(b) *Odredite mješoviti produkt* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}')$ *i napišite njegovo geometrijsko značenje.*
Rješenje: *(a)* $-\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} + 3\vec{k}$ *(b)* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}') = 0$ *jer su vektori komplanarni*

Zadatak 6. [20 bodova]
U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ *diskutirajte rješenje sustava*

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda x_2 &= 2 \\ -\lambda x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Rješenje: $D = 4 - \lambda^2$, $D_1 = 8 + 4\lambda$, $D_2 = 4 + 2\lambda$. *Za* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ *sustav ima jedinstveno rješenje, za* $\lambda = -2$ *sustav ima beskonačno rješenja, a za* $\lambda = 2$ *nema rješenje*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim kolokvijima.