Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
9. prosinca 2013.

1. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Kada za skup vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ *kažemo da je linearno zavisan ?*

(b) *Neka su* P_a, P_b, P_c *polovišta stranica* a, b, c *trokuta* $\triangle ABC$ *čiji vrhovi ne leže na jednom pravcu. Pokažite da tada vrijedi:* $\overrightarrow{P_aP_b} + \overrightarrow{P_bP_c} + \overrightarrow{P_cP_a} = \vec{0}$. *Kako se odnose duljine težišnica trokuta* $\triangle ABC$ *prema duljinama težišnica trokuta* $\triangle P_aP_bP_c$ *? Jesu li vektori* $\overrightarrow{P_aP_b}, \overrightarrow{P_bP_c}, \overrightarrow{P_cP_a}$ *linearno zavisni ? Obrazložite svoju tvrdnju!*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $2:1$

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Kako se definira Euklidska norma* $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}^3$ *i udaljenost* $d_2 \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ *točaka iz* $\mathbb{R}^3$ *?*

(b) *Neka su* $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ *vrhovi trokuta* $\triangle ABC$. *Koristeći Cauchy – Schwarz – Buniakowsky nejednakost pokažite da vrijedi nejednakost trokuta:* $d_2(A,B) \le d_2(A,C) + d_2(C,B)$. *Kada vrijedi jednakost ?*

Rješenje: *Vidi Nastavne materijale;*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kako se definira vektorski produkt dva vektora* $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$ *? Navedite osnovna svojstva vektorskog produkta.*

(b) *Zadani su vektori* $\vec{a} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -8\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$. *Vektor* $\vec{b}$ *prikažite kao zbroj* $\vec{b} = \vec{c} + \vec{c}_\perp$, *gdje je* $\vec{c}$ *vektor u smjeru vektora* $\vec{a}$, *a* $\vec{c}_\perp$ *vektor okomit na vektor* $\vec{a}$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\vec{c} = -9\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c}_\perp = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Kako se definira determinanta kvadratne matrice drugog reda ? Navedite osnovna svojstva.*

(b) *Za koje vrijednosti parametra* λ *sljedeći sustav ima jedinstveno rješenje, a za koje ima beskonačno mnogo rješenja, a za koje vrijednosti parametra* λ *nema rješenje ?*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -\lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $D = -\lambda + \lambda^2$, $D_1 = -1 + \lambda$, $D_2 = -1 - \lambda + 2\lambda^2$, $D_3 = 1 - \lambda$

Zadatak 5. [25 bodova]
(a) *Koji elementi su potrebni da bi se pravac u ravnini zadao u Hesseovom normalnom obliku ? Napišite Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca u ravnini.*

(b) Pravac $-3x + 3y - 3 = 0$ napišite u Hesseovom normalnom obliku. Koji kut zatvara normala na pravac s pozitivnim smjerom apscise ?

(c) Kolika je udaljenost d_0 ishodišta do tog pravca, a kolika je udaljenost d_T točke $T = (1, -2)$ do tog pravca ?

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $\alpha = \frac{3}{4}\pi$; (c) $d_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $d_T = 2\sqrt{2}$*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećem kolokviju.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
9. prosinca 2013.

1. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Kada za skup vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ kažemo da je linearno nezavisan?*

(b) *Neka su P_a, P_b, P_c polovišta stranica a, b, c trokuta $\triangle ABC$ čiji vrhovi ne leže na jednom pravcu. Pokažite da tada vrijedi: $\overrightarrow{P_aA} + \overrightarrow{P_bB} + \overrightarrow{P_cC} = \vec{0}$. Kako se odnose duljine stranica trokuta $\triangle ABC$ prema duljinama stranica trokuta $\triangle P_aP_bP_c$? Jesu li vektori $\overrightarrow{P_aA}, \overrightarrow{P_bB}, \overrightarrow{P_cC}$ linearno zavisni? Obrazložite svoju tvrdnju!*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $2:1$

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Kako se definira l_1-norma $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}^3$ i l_1-udaljenost $d_1 \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ točaka iz $\mathbb{R}^3$?*

(b) *Neka su $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ vrhovi trokuta $\triangle ABC$. Pokažite da vrijedi nejednakost trokuta: $d_1(A, B) \leq d_1(A, C) + d_1(C, B)$. Kada vrijedi jednakost?*

Rješenje: *Vidi Nastavne materijale;*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kako se definira skalarni produkt dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0$? Navedite osnovna svojstva skalarnog produkta.*

(b) *Opišite i navedite osnovna svojstva Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije.*

(c) *Ako je moguće, provedite Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije na vektorima $\vec{a} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (c)* $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i}$

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Navedite Cramerovo pravilo za diskusiju i rješavanje kvadratnog sustava linearnih jednadžbi.*

(b) *Za koje vrijednosti parametra λ sljedeći sustav ima jedinstveno rješenje, a za koje ima beskonačno rješenja, a za koje vrijednosti parametra λ nema rješenje?*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -\lambda x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $D = -4+\lambda^2$, $D_1 = -2+\lambda$, $D_2 = -8+2\lambda^2$, $D_3 = 2-\lambda$

Zadatak 5. [25 bodova]
(a) *Poznavajući Hesseov normalni oblik jednadžbe pravca u ravnini, napišite izraz za udaljenost točke* $P_0 = (x_0, y_0)$ *do tog pravca.*
(b) *Pravac* $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ *napišite u Hesseovom normalnom obliku. Koji kut zatvara normala na pravac s pozitivnim smjerom apscise?*
(c) *Kolika je udaljenost* d_0 *ishodišta do tog pravca, a kolika je udaljenost* d_T *točke* $T = (2, -2)$ *do tog pravca?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\alpha = \frac{\pi}{3}$*; (c)* $d_0 = 1$, $d_T = \sqrt{3}$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećem kolokviju.