Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
5. prosinca 2014.

1. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) Napišite definiciju vektora.

(b) Neka je $ABCD$ paralelogram. Točka P dijeli stranicu $\overline{BC}$ u omjeru $1 : 3$, tj. $d(B,P) \colon d(P,C) = 1 \colon 3$, a točka Q polovište je stranice $\overline{CD}$. Vektor $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) Kako glasi Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost?

(b) Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y + z = 3$. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3.$$

Kada u prethodnoj nejednakosti vrijedi jednakost?

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) Napišite definiciju baze vektorskog prostora $X_0(E)$.

(b) U ravnini M odabrana je fiksna točka O te vektori $\vec{v_1} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{v_2} = -\vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k}$. Čine li vektori $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ bazu u vektorskom prostoru $X_0(M)$? Obrazložite svoju tvrdnju! Zatim, ukoliko čine, odredite ortogonalnu projekciju radijvektora točke $T = (2, -2, 1)$ na ravninu M.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) Kada sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja (obzirom na Cramerovo pravilo)?

(b) Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ sljedeći sustav ima jedinstveno rješenje, za koje ima beskonačno mnogo rješenja, a za koje nema rješenje ?

$$\begin{aligned} -3x_1 - 3x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) Navedite definiciju skalarnog produkta dva vektora u $X_0(E)$.

(b) Dan je trokut $\triangle ABC$ s vrhovima $A = (3, -1, -4)$, $B = (4, -2, -6)$ i $C = (5, -1, -6)$. Vektorskim računom ispitajte je li trokut $\triangle ABC$ pravokutan, odredite duljinu njegovih stranica koristeći l_1 normu i izračunajte njegovu površinu.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
5. prosinca 2014.

1. kolokvij iz
Geometrije ravnine i prostora

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Što znači da su tri ili više vektora komplanarni?*

(b) *Neka je $ABCD$ paralelogram. Točka P polovište je stranice $\overline{AD}$, a točka Q dijeli stranicu $\overline{DC}$ u omjeru $3:1$, tj. $d(D,Q):d(Q,C)=3:1$. Vektor $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Kako glasi Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost?*

(b) *Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $x+y+z=\frac{1}{2}$. Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti pokažite da vrijedi:*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 18.$$

Kada u prethodnoj nejednakosti vrijedi jednakost?

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju baze vektorskog prostora $X_0(M)$.*

(b) *U ravnini M odabrana je fiksna točka O te vektori $\vec{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ i $\vec{v_2}=-2\vec{i}+9\vec{j}+2\vec{k}$. Čine li vektori $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ bazu u vektorskom prostoru $X_0(M)$? Obrazložite svoju tvrdnju! Zatim, ukoliko čine, odredite ortogonalnu projekciju radijvektora točke $T=(-2,1,-2)$ na ravninu M.*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Kada sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice nema rješenja (obzirom na Cramerovo pravilo)?*

(b) *Za koje vrijednosti parametra $\lambda\in\mathbb{R}$ sljedeći sustav ima jedinstveno rješenje, za koje ima beskonačno rješenja, a za koje vrijednosti nema rješenje ?*

$$\begin{aligned}-x_1+x_2+4x_3 &= 2\\ \lambda x_1+x_2-x_3 &= 2\\ -x_1-\lambda x_2+2x_3 &= 2\end{aligned}$$

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Navedite definiciju vektorskog produkta dva vektora u $X_0(E)$.*

(b) *Dan je trokut $\triangle ABC$ s vrhovima $A=(1,-2,-2)$, $B=(3,2,-4)$ i $C=(1,-1,-3)$. Vektorskim računom ispitajte je li trokut $\triangle ABC$ pravokutan, odredite duljinu njegovih stranica koristeći l_∞ normu i izračunajte njegovu površinu.*