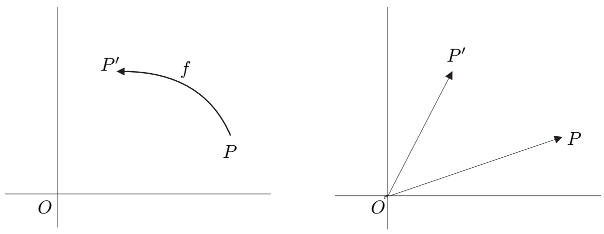
Linearni operatori u ravnini

Rudolf Scitovski, Dragana Jankov Maširević

1 Uvod i motivacija

U ravnini M uvedimo pravokutni koordinatni sustav $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Neka je $f : M \to M$ funkcija koja preslikava ravninu M u ravninu M. Primjerice, takva preslikavanja su različite geometrijske transformacije: translacija, osna simetrija, centralna simetrija, rotacija, homotetija. Za proizvoljnu točku $P \in M$, preslikavanjem f dobivamo novu točku $P' \in M$, tj. $f(P) = P'$ (vidi Sliku 1).



Slika 1: Geometrijska transformacija

Ranije smo ustanovili da između skupa točaka ravnine M i vektorskog prostora $X_0(M)$ postoji bijekcija, pa ćemo svakoj točki P pridružiti njezin radij-vektor $\overrightarrow{OP}$. Definirajmo sada preslikavanje $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ koje će radij-vektor $\overrightarrow{OP}$ preslikati u radij-vektor $\overrightarrow{OP'}$, tj.

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{Of(P)}.$$

Preslikavanje $\mathcal{A}$ zvat ćemo **operator**. Primijetite da smo na taj način konstruirali još jednu bijekciju: bijekciju između svih preslikavanja $f : M \to M$ i skupa svih operatora $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$. Navedimo nekoliko primjera.

Primjer 1. (Simetrija ravnine M u odnosu na prvu koordinatnu os). *Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena osno simetrična slika obzirom na prvu koordinatnu os točka P' s koordinatama $(x_1, -x_2)$ (vidi sliku Sliku 2).*

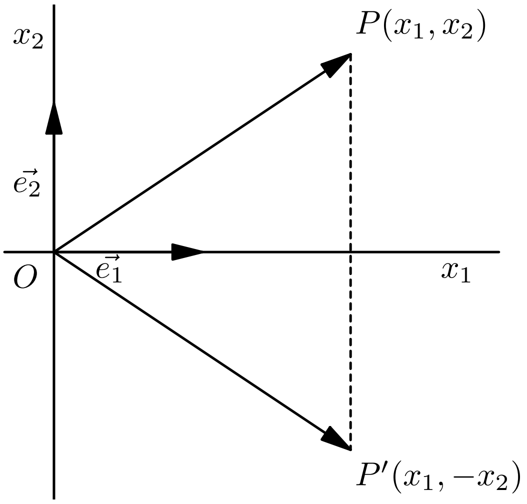
Prikažimo odgovarajuće vektore $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'}$ u bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{OP'} = x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2.$$

Sada operator osne simetrije obzirom na prvu koordinatnu os $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ možemo definirati kroz njegovo djelovanje na proizvoljno izabrani vektor $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \in X_0$ na sljedeći način

$$\mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2.$$

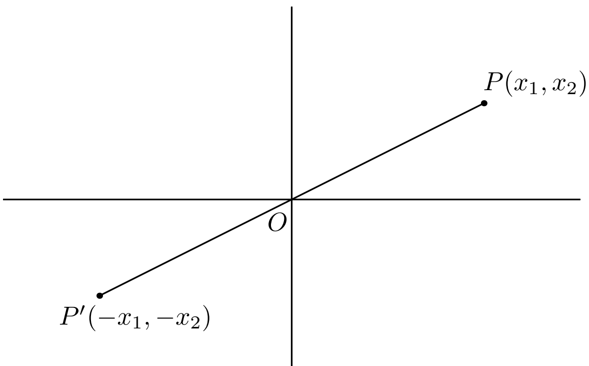
Primijetite da je na taj način definirana vrijednost ovog operatora za svaki vektor $x \in X_0$.



Slika 2: Simetrija obzirom na prvu koordinatnu os

Zadatak 1. *Na sličan način definirajte operator osne simetrije obzirom na drugu koordinatnu os.*

Primjer 2. (Centralna simetrija ravnine M u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava). *Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena centralno simetrična slika u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava točka P' s koordinatam $(-x_1, -x_2)$ (vidi Sliku 3).*



Slika 3: Centralna simetrija obzirom na ishodište

Prikažimo odgovarajuće vektore $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'}$ u bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{OP'} = -x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2.$$

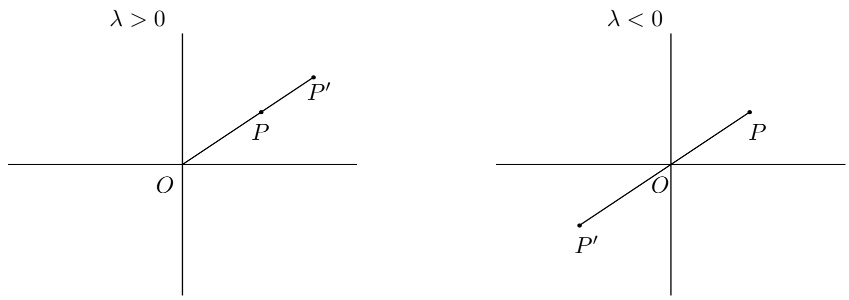
Sada operator centralne simetrije u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ možemo definirati kroz njegovo djelovanje na proizvoljno izabrani vektor $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \in X_0$ na sljedeći način

$$\mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = -x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2.$$

Primijetite da je na taj način definirana vrijednost ovog operatora za svaki vektor $x \in X_0$.

Zadatak 2. *Na sličan način pokušajte definirati operator centralne simetrije u odnosu na točku* $T = (2, 1)$.

Primjer 3. (Homotetija ravnine M u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava). *Ako je* $P \in M$ *proizvoljna točka s koordinatama* (x_1, x_2)*, onda je njena homotetična slika u odnosu na ishodište* O *koordinatnog sustava točka* P' *s koordinatama* $(\lambda x_1, \lambda x_2), \lambda \in \mathbb{R}$ *(vidi Sliku 4).*



Slika 4: Homotetija

Prikažimo odgovarajuće vektore $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'}$ u bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{OP'} = \lambda x_1\vec{e}_1 + \lambda x_2\vec{e}_2.$$

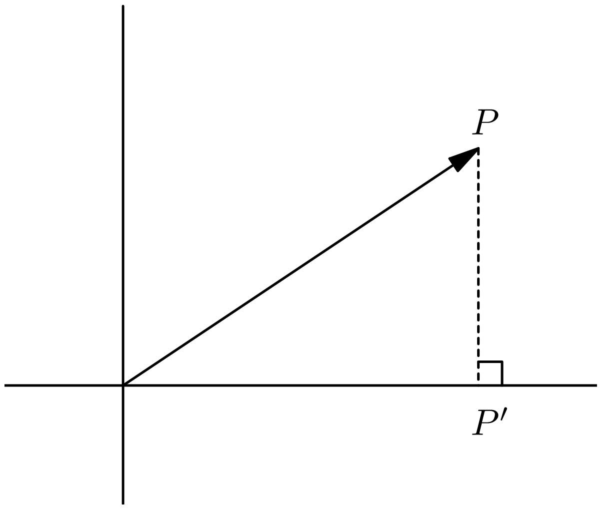
Sada operator homotetije u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ možemo definirati kroz njegovo djelovanje na proizvoljno izabrani vektor $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \in X_0$ na sljedeći način

$$\mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = \lambda x_1\vec{e}_1 + \lambda x_2\vec{e}_2.$$

Primijetite da je na taj način definirana vrijednost ovog operatora za svaki vektor $x \in X_0$. Ako je $|\lambda| < 1$, govorimo o **kontrakciji (stezanju)**, a ako je $|\lambda| > 1$, govorimo o **dilataciji (rastezanju)**.

Zadatak 3. *Pokušajte na sličan način definirati operator koji će u smjeru prve koordinatne osi dvostruko rastegnuti ravninu, a u smjeru druge koordinatne osi upola stegnuti ravninu.*

Primjer 4. (Ortogonalna projekcija ravnine M na prvu koordinatnu os). *Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena ortogonalna projekcija na prvu koordinatnu os točka P' s koordinatama $(x_1, 0)$ (vidi sliku).*



Slika 5: Ortogonalna projekcija na prvu koordinatnu os

Zato se operator projekcije na prvu koordinatnu os $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ definira na sljedeći način

$$\mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1\vec{e}_1.$$

Zadatak 4. *Zadan je operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ formulom*

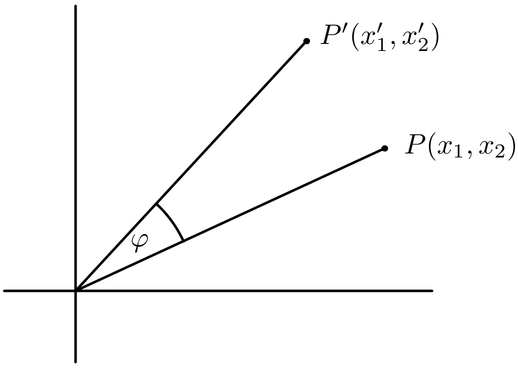
$$\mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1\vec{e}_1 + \gamma x_2\vec{e}_2, \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Za različite vrijednosti od $\gamma \in \mathbb{R}$ opišite djelovanje operatora $\mathcal{A}$.

Primjer 5. (Rotacija ravnine M za kut φ oko ishodišta O koordinatnog sustava). *Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), može se pokazati da rotacijom za kut φ oko ishodišta O koordinatnog sustava dobivamo točku P' s koordinatama $(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)$ (vidi Sliku 6).*

Zato se operator rotacije ravnine M za kut φ oko ishodišta O $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ definira na sljedeći način

$$\mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi)\vec{e}_1 + (x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)\vec{e}_2.$$



Slika 6: Rotacija

2 Linearni operatori u ravnini

Definicija 1. Kažemo da je operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ **linearan operator** ako $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$ $(\forall x, y \in X_0)$ vrijedi[1]

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathcal{A}(x) + \mu \mathcal{A}(y).$$

Nadalje, kad god to neće dovoditi do nesporazuma, djelovanje linearnog operatora $\mathcal{A}$ na vektor x jednostavno ćemo označavati s $\mathcal{A}x$.

Primjer 6. *Pokažimo da je operator simetrije ravnine M u odnosu na prvu koordinatnu os (opisan u* Primjeru 1*) linearan operator.*

Neka su $x, y \in X_0$ proizvoljni vektori. Tada možemo pisati

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ y = y_1 e_1 + y_2 e_2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}x = x_1 e_1 - x_2 e_2 \\ \mathcal{A}y = y_1 e_1 - y_2 e_2 \end{array}\right.$$

Kako je $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1)e_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2)e_2$, djelovanje linearnog opratora $\mathcal{A}$ na linearnu kombinaciju $\lambda x + \mu y$ daje

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = (\lambda x_1 + \mu y_1)e_1 - (\lambda x_2 + \mu y_2)e_2 = \lambda(x_1 e_1 - x_2 e_2) + \mu(y_1 e_1 - y_2 e_2) = \lambda \mathcal{A}x + \mu \mathcal{A}y.$$

Dakle, operator $\mathcal{A}$ ima svojstvo linearnosti navedeno u Definiciji 1, pa je on linearni operator.

Zadatak 5. *Pokažite da su i drugi operatori navedeni u prethodnim primjerima linearani operatori.*

[1] Zbog jednostavnosti pisanja, a i pretpostavke da su studenti u međuvremenu usvojili osnovna predznanja, u daljnjem tekstu više nećemo na vektore stavljati "strelice"

2.1 Svojstva linearnih operatora

S $\mathcal{L}(X_0)$ označimo skup svih linearnih operatora $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$. Navedimo najvažnija svojstva ovog skupa.

1^0 (homogenost) $\mathcal{A}(0) = 0$;

2^0 (jednakost) Dva linearna operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X_0 \to X_0$ su jednaka ako za svaki $x \in X_0$ vrijedi $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$;

3^0 (zbrajanje) Za dva linearna operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X_0 \to X_0$ na uobičajen način definiramo njihov zbroj $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$,

$$(\forall x \in X_0) \quad \mathcal{C}(x) := \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x);$$

4^0 (množenje sa skalarom) Za realni broj $\lambda \in \mathbb{R}$ i linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ na uobičajen način definiramo produkt linearnog operatora sa skalarom (brojem) $\mathcal{F} = \lambda\mathcal{A}$

$$(\forall x \in X_0) \quad \mathcal{F}(x) := (\lambda\mathcal{A})(x) = \lambda\mathcal{A}(x);$$

Lako se može provjeriti da su prethodno definirani operatori $\mathcal{C}$ i $\mathcal{F}$ linearni operatori i da je skup $\mathcal{L}(X_0)$ svih linearnih operatora na X_0 snabdjeven binarnim operacijama zbrajanja i množenja sa skalarom jedan novi vektorski prostor. Pri tome neutralni element za zbrajanje je tzv. **nul-operator** $\mathcal{O}$, koje definiramo s $\mathcal{O}(x) = 0$, $x \in X_0$.

Također jednostavno se pokazuje da je kompozicija linearnih operatora opet linearni operator.

5^0 (produkt) Za dva linearna operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X_0 \to X_0$ na uobičajen način definiramo kompoziciju $\mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$

$$\mathcal{C}(x) := (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x));$$

Uobičajeno je da se kompozicija $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ još naziva i produkt linearnih operatora i označava s: $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ ili samo s $\mathcal{AB}$.

6^0 (svojstva produkta) Lako se može provjeriti da za produkt linearnih operatora vrijedi

- $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC})$ [zakon asocijacije]
- linearni operator $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}(x) = x$, sa svojstvom

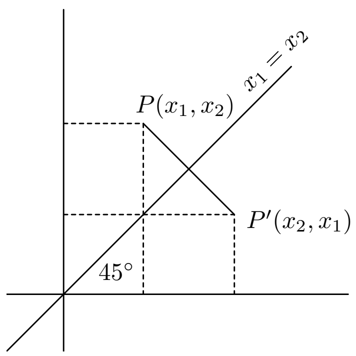
$$\mathcal{AI} = \mathcal{IA} = \mathcal{A},$$

predstavlja neutralni element za množenje linearnih operatora i naziva se **jedinični linearni operator**.

- Skup svih linearnih operatora $\mathcal{L}(X_0)$ snabdjeven binarnom operacijom množenja nije grupa jer svakom linearnom operatoru $\mathcal{A}$ nije moguće pronaći inverzni element.
- Za dva linearna operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ općenito ne vrijedi zakon komutacije

$$\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$$

Primjer 7. *Prethodno navedenu tvrdnju možemo pokazati* kontraprimjerom*. Neka je $\mathcal{A}$ linearni operator projekcije na prvu koordinatnu os, a $\mathcal{B}$ linearni operator simetrije obzirom na simetralu I. i III. kvadranta (vidi Sliku 7):*



Slika 7: Simetrija obzirom na pravac $x_2 = x_1$

$$\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1, \qquad \mathcal{B}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_2e_1 + x_1e_2.$$

Izračunajmo djelovanje produkata $\mathcal{AB}$ i $\mathcal{BA}$ na proizvoljni vektor $x = x_1e_1 + x_2e_2$:

$$\mathcal{AB}(x_1e_1 + x_2e_2) = \mathcal{A}\left(\mathcal{B}(x_1e_1 + x_2e_2)\right) = \mathcal{A}(x_2e_1 + x_1e_2) = x_2e_1 + 0 \cdot e_2$$
$$\mathcal{BA}(x_1e_1 + x_2e_2) = \mathcal{B}\left(\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2)\right) = \mathcal{B}(x_1e_1 + 0 \cdot e_2) = 0 \cdot e_1 + x_1e_2.$$

Očigledno je $\mathcal{AB}(x) \neq \mathcal{BA}(x)$ za sve $x \neq 0$. Što geometrijski predstavljaju operatori $\mathcal{AB}$ i $\mathcal{BA}$?

Zadatak 6. *Pokažite da za linearni operator simetrije obzirom na prvu koordinatnu os (vidi* Primjer 1*) vrijedi $\mathcal{AA} = \mathcal{I}$. Geometrijski obrazložite ovo svojstvo.*

7^0 (distributivnost) Za zbrajanje i množenje linearnih operatora vrijedi zakon distribucije, koji povezuje ove dvije binarne operacije

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$$
$$\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$$

Primjer 8. *Može se pokazati da ako je $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ ili $\mathcal{B} = \mathcal{O}$, onda je $\mathcal{AB} = \mathcal{O}$, ali obrat općenito ne vrijedi.*

U tu svrhu dovoljno je pronaći jedan kontraprimjer. Neka je $\mathcal{A}$ linearni operator projekcije na prvu koordinatnu os, a $\mathcal{B}$ linearni operator projekcije na drugu koordinatnu os. Tada vrijedi

$$\mathcal{AB}(x_1e_1 + x_2e_2) = \mathcal{A}\left(\mathcal{B}(x_1e_1 + x_2e_2)\right) = \mathcal{A}(0 \cdot e_1 + x_2e_2) = 0 \cdot e_1 = 0.$$

Slično pokažite da vrijedi $\mathcal{BA} = \mathcal{O}$. Razmislite o geometrijskom značenju ovog svojstva.

Primjer 9. *Za linearni operator $\mathcal{A}$ možemo definirati operator $\mathcal{A}^2$, tako da za proizvoljni $x \in X_0$ bude $\mathcal{A}^2(x) = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}(x)\right)$. Može se pokazati da ako je $\mathcal{A} = \mathcal{O}$, onda je $\mathcal{A}^2 = \mathcal{O}$, ali obrat općenito ne vrijedi.*

Naravno, u tu svrhu možemo se pozvati na prethodni primjer, ali tvrdnju je moguće i direktno dokazati pronalaženjem jednog kontraprimjera. Provjerite da je za to dobar kontraprimjer operator $\mathcal{A}$ definiran s $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_2e_1$. Najprije provjerite da se radi o linearnom operatoru.

8^0 Kao što smo ranije utvrdili, za množenje linearnih operatora ne vrijedi zakon komutacije. Ipak u nekim specijalnim slučajevima za dva linearna operatora može se dogoditi da vrijedi zakon komutacije. Tada kažemo da oni **komutiraju**.

Zadatak 7. *Pokažite da su niže navedeni operatori $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ linearni i da komutiraju.*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2) &= (x_1 + x_2)e_1 + x_2e_2\\ \mathcal{B}(x_1e_1 + x_2e_2) &= (x_1 - x_2)e_1 + x_2e_2\end{aligned}$$

Zadatak 8. *Matematičkom indukcijom pokažite da ako linearni operatori $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}\left(X_0\right)$ komutiraju, onda vrijedi*

$$\left(\mathcal{AB}\right)^n = \mathcal{B}^n\mathcal{A}^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Također, na kontraprimjeru pokažite da navedena formula ne mora vrijediti ako linearni operatori $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ne komutiraju.

9^0 Ako je $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ polinom, onda operator

$$P(\mathcal{A}) = a_0 + a_1\mathcal{A} + \cdots + a_n\mathcal{A}^n, \qquad \mathcal{A} \in \mathcal{L}\left(X_0\right)$$

zovemo vrijednost polinoma P na operatoru $\mathcal{A}$. Pokažite da je operator $P(\mathcal{A})$ linearan operator.

Zadatak 9. *Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{L}\left(X_0\right)$ linearan operator pokažite da za operator $P(\mathcal{A})$ vrijedi*

- $\mathcal{A}P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A})\mathcal{A}$,
- *ako je* $a, b \in \mathbb{R}$ *i* $P_2(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)$, *onda vrijedi* $P_2(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} - a\mathcal{I})(\mathcal{A} - b\mathcal{I})$,
- *ako su* $a, b \in \mathbb{R}$ *realne nultočke polinoma* $P_2(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab$, *pokažite da vrijedi* $P_2(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} - a\mathcal{I})(\mathcal{A} - b\mathcal{I})$.

3 Algebra matrica drugog reda

Lema 1. *Ako se linearni operatori* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X_0)$ *podudaraju na bazi vektorskog prostora* X_0, *onda su oni jednaki.*

Dokaz. Neka je (e_1, e_2) baza u X_0. Po pretpostavci je

$$\mathcal{A}e_1 = \mathcal{B}e_1 \quad \& \quad \mathcal{A}e_2 = \mathcal{B}e_2.$$

Neka je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ proizvoljni vektor. Tada, koristeći svojstvo linearnosti operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ i prethodne jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= \mathcal{A}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 \mathcal{A}e_1 + x_2 \mathcal{A}e_2 = \\ &= x_1 \mathcal{B}e_1 + x_2 \mathcal{B}e_2 = \mathcal{B}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \mathcal{B}x. \end{aligned}$$

♣

Teorem 1. *Neka je* (e_1, e_2) *baza u vektorskom prostoru* X_0, *a* $v_1, v_2 \in X_0$ *bilo koja dva vektora. Tada postoji jedinstveni linearni operator* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X_0)$, *takav da bude*

$$\mathcal{A}e_1 = v_1 \quad \& \quad \mathcal{A}e_2 = v_2. \tag{1}$$

Dokaz. Konstruirajmo najprije operator $\mathcal{A}$, koji ima svojstvo (1). U tu svrhu izaberimo proizvoljni $x \in X_0$. Tada postoje jedinstveni realni brojevi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, takvi da je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Također, na taj način jednoznačno je određen vektor $x_1 v_1 + x_2 v_2$. Definirajmo sada operator $\mathcal{A}$ formulom

$$\mathcal{A}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 v_1 + x_2 v_2. \tag{2}$$

(i) Najprije, lako je (odgovarajućim izborom brojeva x_1, x_2) provjeriti da vrijedi (1).

(ii) Pokažimo da je operator $\mathcal{A}$, definiran formulom (2), linearan. Za $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= (\lambda x_1 + \mu y_1) e_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2) e_2, \\ \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) &= (\lambda x_1 + \mu y_1) v_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2) v_2 = \\ &= \lambda (x_1 v_1 + x_2 v_2) + \mu (y_1 v_1 + y_2 v_2) = \lambda \mathcal{A}x + \mu \mathcal{A}y \end{aligned}$$

(iii) Pokažimo jedinstvenost ovako definiranog linearnog operatora $\mathcal{A}$. Poslužit ćemo se metodom kontradikcije. Pretpostavimo da je $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X_0)$ neki drugi linearni operator sa svojstvom: $\mathcal{B}e_1 = v_1 \quad \& \quad \mathcal{B}e_2 = v_2$. Uspoređujući ove jednakosti s (1) dobivamo $\mathcal{A}e_1 = \mathcal{B}e_1 \quad \& \quad \mathcal{A}e_2 = \mathcal{B}e_2$, što prema Lemi 1 znači da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

Time je dokaz teorema kompletiran. ♣

Lema 1 zapravo pokazuje da je neki linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ potpuno određen ako je poznato njegovo djelovanje na bazu (e_1, e_2) vektorskog prostora X_0. Djelovanjem linearnog operatora $\mathcal{A}$ na bazne vektore e_1, e_2 dobivamo nove vektore $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2 \in X_0$, koje također možemo na jedinstven način prikazati u bazi (e_1, e_2)

$$\mathcal{A}e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$$
$$\mathcal{A}e_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$$

gdje su (a_{11}, a_{21}), odnosno (a_{12}, a_{22}), odgovarajuće koordinate vektora $\mathcal{A}e_1$, odnosno $\mathcal{A}e_2$. Pamtit ćemo ih tako da načinimo kvadratnu tablicu u čijem prvom stupcu će se nalaziti koordinate vektora $\mathcal{A}e_1$, a u drugom stupcu koordinate vektora $\mathcal{A}e_2$. Tablicu ćemo označiti velikim štampanim slovom A i uglatim zagradama.[2]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Primjer 10. *Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini, a $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X_0)$ linearni operator simetrije obzirom na prvu koordinatnu os*

$$\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 - x_2e_2.$$

Kako je specijalno (za $x_1 = 1, x_2 = 0$) $\mathcal{A}e_1 = 1 \cdot e_1 - 0 \cdot e_2$, te $\mathcal{A}e_2 = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2$ (za $x_1 = 0, x_2 = 1$), odgovarajuća matrica A linearnog operatora $\mathcal{A}$ u bazi (e_1, e_2) zadana je s

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obrnuto, ako je poznata matrica A i baza (e_1, e_2) vektorskog prostora X_0, time je potpuno određen linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$:

- najprije definirajmo vektore

$$v_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2, \qquad v_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2.$$

[2] U literaturi se matrice još označavaju ili parom okruglih zagrada ( ) ili s dva para okomitih crta ‖ ‖, ali nikako s dvije okomite crte | | jer je ta oznaka rezervirana za determinantu.

- Prema Teoremu 1, str. 9 postoji jedinstveni linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$, takav da je
$$\mathcal{A}e_1 = v_1 \quad \& \quad \mathcal{A}e_2 = v_2$$
odnosno,
$$\begin{aligned}\mathcal{A}e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2\\ \mathcal{A}e_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2\end{aligned}$$

Budući da je poznato njegovo djelovanje na bazne vektore, prema Lemi 1, str. 9 linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ potpuno je određen.

Primjer 11. *Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini i $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrica drugog reda. Treba odrediti linearni operator $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X_0)$ kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica A.*

Matricom A zadan je linearni operator $\mathcal{A}$, za kojeg vrijedi
$$\begin{aligned}\mathcal{A}e_1 &= 3e_1 + e_2\\ \mathcal{A}e_2 &= -e_1 + 2e_2.\end{aligned}$$

Za proizvoljni $x \in X_0$ postoje jedinstveni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, takvi da je $x = x_1e_1 + x_2e_2$, a djelovanje linearnog operatora $\mathcal{A}$ na vektor x je
$$\begin{aligned}\mathcal{A}x &= x_1\mathcal{A}e_1 + x_2\mathcal{A}e_2 = x_1(3e_1 + e_2) + x_2(-e_1 + 2e_2) =\\ &= (3x_1 - x_2)e_1 + (x_1 + 2x_2)e_2\end{aligned}$$

3.1 Svojstva matrica

S M_2 označimo skup svih kvadratnih matrica drugog reda. Navedimo najvažnija svojstva ovog skupa.

1^0 (jednakost) Dvije matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ su jednake onda i samo onda ako su im jednaki svi odgovarajući koeficijenti, tj.
$$A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11}, & a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21}, & a_{22} = b_{22} \end{cases}$$

Ovo svojstvo direktno slijedi iz činjenice (Lema 1,str. 9) da su dva linearna operatora jednaka ako se podudaraju na baznim vektorima.

Preneseći direktno strukturu vektorskog prostora $\mathcal{L}(X_0)$ svih linearnih operatora iz X_0 u X_0, možemo definirati zbrajanje, odnosno množenje sa skalarom na skup matrica M_2.

2^0 (zbrajanje matrica) Neka matricama $A, B \in M_2$ pripadaju odgovarajući linearni operatori $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X_0)$. Tada možemo definirati matricu $C := A+B$, kao zbroj matica A i B na sljedeći način

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}, \qquad i, j = 1, 2$$
$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} =: C$$

Naime, djelovanje linearnog operatora $\mathcal{C}$ na bazni vektor e_1 je

$$\mathcal{C}e_1 = (\mathcal{A}+\mathcal{B})e_1 = \mathcal{A}e_1+\mathcal{B}e_1 = (a_{11}e_1+a_{21}e_2)+(b_{11}e_1+b_{21}e_2) = (a_{11}+b_{11})e_1+(a_{21}+b_{21})e_2$$

Slično pokažite djelovanje linearnog operatora $\mathcal{C}$ na bazni vektor e_2. Dakle, matrice se zbrajaju tako da im zbrojimo sve odgovarajuće elemente.

3^0 (množenje matrica skalarom) Neka matrici $A \in M_2$ pripada odgovarajući linearni operatori $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X_0)$. Tada možemo definirati matricu $F := \lambda A$, na sljedeći način

$$f_{ij} := \lambda a_{ij}, \qquad i, j = 1, 2$$
$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} =: F$$

Naime, djelovanje linearnog operatora $\mathcal{F}$ na bazni vektor e_1 je

$$\mathcal{F}e_1 = (\lambda\mathcal{A})e_1 = \lambda(\mathcal{A}e_1) = \lambda(a_{11}e_1 + a_{21}e_2) = (\lambda a_{11})e_1 + (\lambda a_{21})e_2.$$

Slično pokažite djelovanje linearnog operatora $\mathcal{F}$ na bazni vektor e_2. Dakle, matricu množimo skalarom tako da sve njezine elemente pomnožimo tim skalarom. Sjetite se kako se množi determinanta nekim brojem !

Lako se može provjeriti da je skup M_2 svih kvadratnih matrica snabdjeven binarnim operacijama zbrajanja i množenja sa skalarom jedan **novi vektorski prostor**. Pri tome neutralni element za zbrajanje je tzv. **nul-matrica** O, kojoj su svi elementi jednaki nuli.

4^0 (množenje matrica) Produkt dviju matrica A, B opet je matrica $D := AB$ definirana na sljedeći način

$$d_{ij} := \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj}, \qquad i, j = 1, 2$$
$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} =: D \tag{3}$$

Neka matricama A, B u bazi (e_1, e_2) pripadaju linearni operatori $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Neka je nadalje $\mathcal{D} = \mathcal{AB}$. Djelovanjem linearnog operatora $\mathcal{D}$ na bazni vektor e_1 dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}e_1 &= (\mathcal{AB})e_1 = \mathcal{A}(\mathcal{B}e_1) = \mathcal{A}(b_{11}e_1 + b_{21}e_2) = \\
&= b_{11}\mathcal{A}e_1 + b_{21}\mathcal{A}e_2 = b_{11}(a_{11}e_1 + a_{21}e_2) + b_{21}(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})e_1 + (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})e_2
\end{aligned}$$

Na sličan način pokažite da je

$$\mathcal{D}e_2 = (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})e_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})e_2.$$

Time je obrazložena formula (3).

Zadatak 10. *Za matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *izračunajte produkt* $C = AB$.

5^0 (svojstva produkta) Lako se može provjeriti da za množenje matrica vrijedi

- $(AB)\,C = A\,(BC)$ [zakon asocijacije]
- matrica $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ predstavlja neutralni element za množenje matrica i naziva se **jedinična matrica**.
- Skup svih kvadratnih matrica M_2 snabdjeven binarnom operacijom množenja **nije grupa** jer svakoj matrici A nije moguće pronaći inverzni element. Ako za danu matricu $A \in M_2$ postoji takva matrica $B \in M_2$, da bude $AB = BA = I$, onda kažemo da je matrica B **inverzna matrica** matrice A i označavamo je s A^{-1}.

  Zadatak 11. *Pokažite da matrica* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *nema inverznu matricu, te da je inverzna matrica matrice* $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *zadana s* $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

- Za dvije kvadratne matrice A, B općenito ne vrijedi zakon komutacije

$$AB \neq BA$$

  Ako za dvije matrice vrijedi zakon komutacije, kažemo da one **komutiraju**.

  Zadatak 12. *Pronađite primjer dviju matrica za koje vrijedi zakon komutacije, te primjer dviju matrica za koje ne vrijedi zakon komutacije.*

Zadatak 13. *Pokažite da za matricu* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *vrijedi* $A^2 = A \cdot A = O$. *Pronađite takvu matricu za koju vrijedi* $A^2 = I$.

6^0 (distributivnost) Za zbrajanje i množenje matrica vrijedi zakon distribucije, koji povezuje ove dvije binarne operacije

$$(A+B)C = AC + BC$$
$$A(B+C) = AB + AC$$

7^0 Kao što smo ranije definirali pojam determinante, sada možemo definirati i determinantu kvadratne matrice drugog reda

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Provjerite da za dvije kvadratne matrice A, B vrijedi (Binet-Cauchyjev teorem)

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

3.2 Kontrakcija i dilatacija ravnine

Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Linearni operator $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(X_0)$ definirajmo na sljedeći način

$$\mathcal{C}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 + \gamma x_2e_2, \qquad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Primijetite da je linearni operator $\mathcal{C}$ specijalno

- za $\gamma = 1$ jedinični linearni operator ($\mathcal{C} = \mathcal{I}$);
- za $\gamma = 0$ projekcija na prvu koordinatnu os;
- za $\gamma = -1$ simetrija obzirom na prvu koordinatnu os;

U općem slučaju linearnom operatoru $\mathcal{C}$ u bazi (e_1, e_2) pripada matrica $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$. Pogledajmo kako linearni operator $\mathcal{C}$ djeluje na neke geometrijske objekte u ravnini.

- (kružnica) Jediničnu kružnicu sa središtem u točki O

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

preslikava u elipsu

$$\mathcal{C}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \frac{\eta^2}{\gamma^2} = 1\}.$$

Naime, točka $T = (x_1, x_2) \in \mathcal{K}$ prelazi u točku $T' = (\xi, \eta)$, pri čemu je

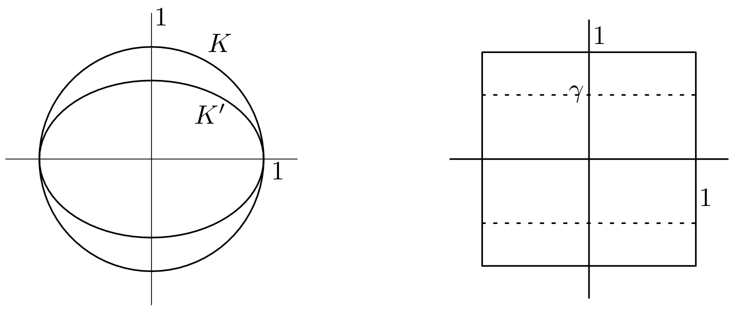
$$\xi = x_1, \qquad \eta = \gamma x_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \xi^2 + \frac{\eta^2}{\gamma^2} = 1.$$

- (pravokutnik) Pravokutnik

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_2 \leq 1\}$$

preslikava u pravokutnik

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \xi \leq 1, \quad -\gamma \leq \eta \leq \gamma\}$$



Slika 8: Kontrakcija jedinične kružnice i kvadrata

Iz prethodnih primjera moglo se vidjeti da linearni operator $\mathcal{C}$ steže (odnosno rasteže) geometrijske objekte u smjeru druge koordinatne osi. To su razlozi zbog kojih linearni operator $\mathcal{C}$

- za $|\gamma| < 1$ zovemo **kontrakcija** (stezanje) prema prvoj koordinatnoj osi;
- za $|\gamma| > 1$ zovemo **dilatacija** (rastezanje) prema prvoj koordinatnoj osi;

Definirajmo sada linearni operator $\mathcal{A}_1$, koji steže (rasteže) ravninu u smjeru prve koordinatne osi i linearni operator $\mathcal{A}_2$, koji steže (rasteže) ravninu u smjeru druge koordinatne osi

$$\mathcal{A}_1(x_1e_1 + x_2e_2) = \alpha_1x_1e_1 + x_2e_2, \quad \alpha_1 > 0,$$
$$\mathcal{A}_2(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 + \alpha_2x_2e_2, \quad \alpha_2 > 0,$$

kojima u bazi (e_1, e_2) pripadaju matrice $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, odnosno $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$.

Linearni operator $\mathcal{A}$, kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica $A = A_1A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ zadan je s

$$\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2) = \alpha_1x_1e_1 + \alpha_2x_2e_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

On jediničnu kružnicu $\mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ preslikava u elipsu

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

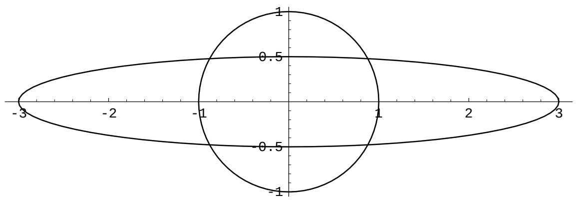
Naime, točku $T = (x_1, x_2) \in \mathcal{K}$ preslikava u točku $T' = (\xi, \eta)$, pri čemu je

$$\xi = \alpha_1 x_1, \qquad \eta = \alpha_2 x_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\tfrac{\xi}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\tfrac{\eta}{\alpha_2}\right)^2 = 1.$$

Primjerice, za $\alpha_1 > 1$ i $\alpha_2 < 1$ rasteže kružnicu $\mathcal{K}$ u smjeru prve koordinatne osi i steže u smjeru druge koordinatne osi.

Primjenom programskog sustava *Mathematica* pomoću kratkog niže navedenog programa pogledajte djelovanje linearnog operatora kontrakcije za različite vrijednosti parametara α_1, α_2.

```
In[1]:= al1 = 3; al2 = .5;
        ContourPlot[{x^2 + y^2 == 1, (x/al1)^2 + (y/al2)^2 == 1}, {x, -3, 3},{y, -1, 
                    Axes -> True, Frame -> False, AspectRatio -> Automatic]
```



Slika 9: Djelovanje linearnog operatora kontrakcije na jediničnu kružnicu

Primjer 12. *Zadan je linearni operator $\mathcal{C}$, kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica* $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$*, tj.*

$$\mathcal{C}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = (2x_1 + x_2)e_1 + (x_1 + 2x_2)e_2.$$

Razmotrimo djelovanje ovog linearnog operatora na jediničnu kružnicu $\mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Linearni operator $\mathcal{C}$ vektor $x_1 e_1 + x_2 e_2$, gdje je $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}$ preslikava u neki novi vektor $\xi e_1 + \eta e_2$, tako da je

$$(2x_1 + x_2)e_1 + (x_1 + 2x_2)e_2 = \xi e_1 + \eta e_2.$$

Iz jednakosti

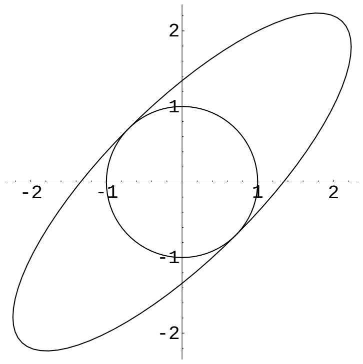
$$2x_1 + x_2 = \xi, \qquad x_1 + 2x_2 = \eta,$$

dobivamo

$$x_1 = \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}\eta, \qquad x_2 = -\frac{1}{3}\xi + \frac{2}{3}\eta.$$

Zato jedinična kružnica $\mathcal{K}$ djelovanjem linearnog operatora $\mathcal{C}$ prelazi u elipsu (vidi sliku):

$$\left(\frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}\eta\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\xi + \frac{2}{3}\eta\right)^2 = 1.$$



Slika 10: Djelovanje linearnog operatora $\mathcal{C}$ na jediničnu kružnicu

4 Svojstveni problem

Definicija 2. Kažemo da je kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}$ **svojstvena (karakteristična) vrijednost**[3] linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ ako postoji ne-nul vektor $x \neq 0$, takav da bude

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \tag{5}$$

pri čemu vektor x nazivamo **svojstveni (karakteristični) vektor** koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.

Primijetite da su vektori x i $\mathcal{A}x$ kolinearni, a da svojstveni vektor x, koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ, nije jedinstven. Naime, svaki vektor oblika αx, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ također je svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ:

$$\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x).$$

Šta više skup svih vektora, kojima pripada svojstvena vrijednost λ, a kome je još dodan nulvektor, čine vektorski potprostor u X_0, koji zovemo **svojstveni potprostor** linearnog operatora $\mathcal{A}$, koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.

[3] eng.: eigenvalue – eigenvector, njem.: eigenwert – eigenvektor

Primjer 13. *Neka je* $(O; e_1, e_2)$ *pravokutni koordinatni sustav u ravnini i* $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ *dijagonalna matrica drugog reda. Time je u skladu s* Teoremom 1, str. 9 *na jedinstven način određen linearni operator* $\mathcal{A}$ *zadan svojim djelovanjem na bazne vektore:*

$$\mathcal{A}e_1 = \alpha_1 e_1, \qquad \mathcal{A}e_2 = \alpha_2 e_2.$$

Primijetite da su u ovom slučaju brojevi α_1 *i* α_2 *svojstvene vrijednosti, a bazni vektori* e_1*, odnosno* e_2*, odgovarajući svojstveni vektori.*

Pretpostavimo da je $\lambda \in \mathcal{C}$ svojstvena vrijednost linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$. Tada postoji ne-nul vektor $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, takav da je $\mathcal{A}x = \lambda x$, tj.

$$\begin{aligned} & \xi_1 \mathcal{A}e_1 + \xi_2 \mathcal{A}e_2 = \lambda\xi_1 e_1 + \lambda\xi_2 e_2 \\ \Longrightarrow\quad & \xi_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2) + \xi_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = \lambda\xi_1 e_1 + \lambda\xi_2 e_2 \\ \Longrightarrow\quad & (\xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{12} - \lambda\xi_1)e_1 + (\xi_1 a_{21} + \xi_2 a_{22} - \lambda\xi_2)e_2 = 0 \end{aligned}$$

odakle dobivamo homogeni sustav linearnih jednadzbi

$$\begin{array}{rcrcl} (a_{11} - \lambda)\xi_1 & + & a_{12}\xi_2 & = & 0 \\ a_{21}\xi_1 & + & (a_{22} - \lambda)\xi_2 & = & 0 \end{array} \tag{6}$$

Matrica ovog sustava je $A - \lambda I$, gdje je A matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$, a I je odgovarajuća jedinična matrica. Budući da vektor $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ treba biti ne-nul vektor, potražit ćemo netrivijalno rješenje prethodnog sustava, tj. zahtijevat ćemo da matrica sustava bude singularna. To će biti ispunjeno ako vrijedi (vidi Cramerovu metodu)

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{7}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su svojstvene vrijednosti linearnog operatora $\mathcal{A}$. Označimo ih s λ_1, λ_2. Ako u sustav (6) umjesto λ uvrstimo λ_i, $i = 1, 2$ i riješimo sustav, dobit ćemo odgovarajući svojstveni vektor v_i, $i = 1, 2$.

Primjer 14. *Neka je* $(O; e_1, e_2)$ *pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Odredimo svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore linearnog operatora* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *koji je zadan svojim djelovanjem na bazne vektore na sljedeći način:*

$$\mathcal{A}e_1 = -e_1 + 4e_2, \qquad \mathcal{A}e_2 = 4e_1 + 5e_2.$$

U bazi $\{e_1, e_2\}$ linearnom operatoru $\mathcal{A}$ pripada matrica $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Odgovarajući sustav linearnih jednadžbi (6) glasi

$$\begin{array}{rcrcl} (-1 - \lambda)\xi_1 & + & 4\xi_2 & = & 0 \\ 4\xi_1 & + & (5 - \lambda)\xi_2 & = & 0\,. \end{array} \tag{8}$$

Matrica ovog sustava je $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$, a jednadžba (7) postaje $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0$, odakle dobivamo svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 7$. Ako u (8) umjesto λ redom uvrstimo λ_i, $i = 1, 2$ i riješimo sustav, dobivamo odgovarajuće svojstvene vektore $x_1 = -2e_1 + e_2$ i $x_2 = e_1 + 2e_2$.

Primjer 15. *Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Odredimo svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ koji je zadan svojim djelovanjem na bazne vektore na sljedeći način:*

$$\mathcal{A}e_1 = e_1, \qquad \mathcal{A}e_2 = e_1 + e_2.$$

U bazi $\{e_1, e_2\}$ linearnom operatoru $\mathcal{A}$ pripada matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Odgovarajući sustav linearnih jednadžbi (6) glasi

$$\begin{array}{rcrcl} (1-\lambda)\xi_1 & + & \xi_2 & = & 0 \\ & & (1-\lambda)\xi_2 & = & 0\,. \end{array} \tag{9}$$

Matrica ovog sustava je $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$, a jednadžba (7) postaje $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 = 0$, odakle dobivamo dvostruku svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Uvrštavanjem u sustav (9) $\lambda_1 = 1$, umjesto λ, dobivamo jedan jedinični svojstveni vektor $v_1 = e_1$. Kako ovaj linearni operator $\mathcal{A}$ djeluje na jediničnu kružnicu $\mathcal{K} = \{x = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \colon u_1^2 + u_2^2 = 1\}$?

Može se postaviti ovakvo pitanje:

> *Ako je $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ linearni operator, kome u bazi e_1, e_2 pripada matrica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, postoji li neka nova baza e_1', e_2' u kojoj će tom linearnom operatoru pripadati dijagonalna matrica ?*

Odgovor na ovo pitanje potražit ćemo u jednom specijalnom slučaju: u slučaju kada je matrica A simetrična matrica.

4.1 Simetrični linearni operatori u ravnini

Definicija 3. Kažemo da je linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ **simetričan** ako vrijedi

$$\mathcal{A}x \cdot y = x \cdot \mathcal{A}y, \quad \forall x, y \in X_0. \tag{10}$$

Zadatak 14. *Direktnom provjerom pokažite da za funkciju* $F : X_0 \times X_0 \to \mathbb{R}$ *definiranu formulom* $F(x, y) = \mathcal{A}x \cdot y$*, gdje je* $\mathcal{A}$ *linearni operator kome u bazi* e_1, e_2 *pripada matrica iz* Primjera 13, str. 18 *vrijedi "svojstvo simetrije":*

$$F(x, y) = F(y, x), \quad \forall x, y \in X_0,$$

tj. linearni operator iz Primjera 13, str. 18 *je simetrični linearni operator.*

Zadatak 15. *Pokažite da simetričnom linearnom operatoru u nekoj bazi pripada simetrična matrica.*

Zadatak 16. *Neka je* $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ *simetrični linearni operator. Pokažite da*

- *ako je* $\sigma \in \mathbb{R}$ *i* $\mathcal{I}$ *jedinični operator, onda je i operator* $(\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})$ *također simetričan;*
- *ako je* $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$*, a* $\mathcal{I}$ *jedinični operator, onda operatori* $(\mathcal{A} - \sigma_1\mathcal{I})$ *i* $(\mathcal{A} - \sigma_2\mathcal{I})$ *komutiraju.*

U sljedećem teoremu pokazat ćemo da za proizvoljni simetrični linearni operator može pronaći takva ortonormirana baza u kojoj tom linearnom operatoru pripada dijagonalna matrica s realnim elementima. Također možemo reći da simetrični linearni operator ima realne svojstvene vrijednosti, pri čemu su odgovarajući svojstveni vektori međusobno okomiti.

Teorem 2. *Ako je* $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ *simetrični linearni operator na vektorskom prostoru* $X_0 = X_0(M)$*, onda postoje realni brojevi* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *i ortonormirana baza* (e_1', e_2') *vektorskog prostora* X_0*, tako da bude*

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2'.$$

Dokaz. Za proizvoljni vektor $e \in X_0(M)$ u vektorskom prostoru $X_0(M)$ tri vektora $e, \mathcal{A}e, \mathcal{A}^2 e$ su linearno zavisna. Razlikovat ćemo pri tome slučajeve kada su vektori $e, \mathcal{A}e$ linearno zavisni ili linearno nezavisni.

- **Slučaj 1.** Pretpostavimo najprije da je $e \neq 0$ i da su vektori $e, \mathcal{A}e$ linearno zavisni. Tada postoji skalar $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, takav da bude $\mathcal{A}e = \lambda_1 e$.

  Djeljenjem s $\|e\|$, uz oznaku $e_1' := e/\|e\|$ dobivamo

  $$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1'.$$

  Neka je nadalje e_2' jedinični vektor okomit na e_1'. Pokažimo da je $\mathcal{A}e_2' \perp e_1'$:

  $$e_1' \cdot \mathcal{A}e_2' = \mathcal{A}e_1' \cdot e_2' = (\lambda_1 e_1') \cdot e_2' = \lambda_1(e_1' \cdot e_2') = 0.$$

  To znači da je $\mathcal{A}e_2'$ kolinearan s e_2', tj. da postoji $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ takav da je

  $$\mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2'.$$

- **Slučaj 2.** Pretpostavimo da su vektori $e, \mathcal{A}e$ linearno nezavisni. Zbog linearne zavisnosti vektora $e, \mathcal{A}e, \mathcal{A}^2e$ postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\mathcal{A}^2 e = \alpha \mathcal{A} e + \beta e, \text{ odnosno } \left(\mathcal{A}^2 - \alpha\mathcal{A} - \beta\mathcal{I}\right) e = 0.$$

Ako definiramo polinom – kvadratnu funkciju u λ: $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\lambda - \beta$, onda prethodnu jednakost možemo pisati:

$$P(\mathcal{A})e = 0.$$

Tvrdimo da su nultočke polinoma P realne!

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da su nultočke polinoma P konjugirano-kompleksni brojevi:

$$\sigma + it, \quad \sigma - it, \qquad \sigma, t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0.$$

Faktorizirani zapis polinoma P glasi

$$P(\lambda) = (\lambda - (\sigma + it))\,(\lambda - (\sigma - it)) = (\lambda - \sigma)^2 + t^2$$

Zbog $P(\mathcal{A})e = 0$ slijedi

$$(\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})^2 e + t^2 e = 0$$

Kako je $\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I}$ simetrični linearni operator (*Zadatak 16, str. 20*)

$$(\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})^2 e \cdot e = (\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})(\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})e \cdot e = (\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})e \cdot (\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})e$$

i kako je $\|e\|^2 = e \cdot e$, množeći skalarno prethodnu jednakost vektorom e, dobivamo

$$\|(\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})e\|^2 + t^2\|e\|^2 = 0.$$

Odavde slijedi

$$\|(\mathcal{A} - \sigma\mathcal{I})e\| = 0 \quad \& \quad t\|e\| = 0,$$

iz čega zbog pretpostavke da je $e \neq 0$ slijedi $t = 0$, a ovo se protivi polaznoj pretpostavci. Zbog toga možemo tvrditi da su nultočke polinoma P realne. Označimo ih s λ_1, λ_2.

Tvrdimo da je $\lambda_1 \neq \lambda_2$!

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lambda_2 = \lambda_1$. Tada bi faktorizirani oblik polinoma P bio

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2.$$

Zato iz

$$P(\mathcal{A})e = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I})^2 e = 0,$$

pa množenjem ove jednakosti sklarno s e dobivamo

$$\|(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})e\|^2 = 0 \quad \text{odnosno} \quad \mathcal{A}e - \lambda_1 e = 0,$$

iz čega proizlazi da su $\mathcal{A}e$ i e linearno zavisni, što se protivi polaznoj pretpostavci.

Sada još treba pokazati da su i u ovom slučaju odgovarajući svojstveni vektori međusobno okomiti.

Kako je, dakle

$$P(\mathcal{A})e = 0 \quad \text{gdje je} \quad P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

slijedi

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})\,(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})\,e = 0.$$

Ako stavimo

$$\begin{aligned} v_1 &:= (\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})\,e = \mathcal{A}e - \lambda_2 e \neq 0,\\ v_2 &:= (\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})\,e = \mathcal{A}e - \lambda_1 e \neq 0, \end{aligned}$$

onda iz prethodne jednakosti slijedi

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})\,v_1 = 0 \quad \& \quad (\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})\,v_2 = 0, \quad \text{odnosno}\\ &\mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad\quad \& \quad \mathcal{A}v_2 = \lambda_2 v_2. \end{aligned}$$

Dakle, v_1, v_2 su svojstveni vektori linearnog operatora $\mathcal{A}$, koji pripadaju svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2.

Tvrdimo da su svojstveni vektori v_1, v_2 međusobno okomiti !

Kako je

$$\mathcal{A}v_1 \cdot v_2 = \lambda_1 v_1 \cdot v_2 \quad \& \quad \mathcal{A}v_2 \cdot v_1 = \lambda_2 v_2 \cdot v_1$$

zbog simetričnosti linearnog operatora $\mathcal{A}$ vrijedi

$$0 = \mathcal{A}v_1 \cdot v_2 - \mathcal{A}v_2 \cdot v_1 = \lambda_1 v_1 \cdot v_2 - \lambda_2 v_2 \cdot v_1,$$

iz čega slijedi

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 \cdot v_2 = 0,$$

a kako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, slijedi $v_1 \cdot v_2 = 0$. Na taj način i u ovom slučaju pronašli smo tražene ortonormirane svojstvene vektore

$$e_1' := \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad e_2' := \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

♣

Primjer 16. *Linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ zadan je svojim djelovanjem na vektorima baze: $\mathcal{A}e_1 = 2e_1 + e_2$, $\mathcal{A}e_2 = e_1 + 2e_2$.*

Budući da u bazi (e_1, e_2) ovom linearnom operatoru pripada simetrična matrica $A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, ovaj linearni operator je simetričan.

Pronađimo njegove svojstvene vrijednosti i odgovarajuće svojstvene vektore. Prateći tijek dokaza teorema uzmimo primjerice $e = e_1$ i izračunamo:

$$\mathcal{A}e_1 = 2e_1 + e_2 \qquad \mathcal{A}^2 e_1 = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}e_1\right) = \mathcal{A}\left(2e_1 + e_2\right) = 5e_1 + 4e_2$$

Kako su e_1 i $\mathcal{A}e_1$ očigledno linearno nezavisni, pronađimo α, β, tako da bude

$$\mathcal{A}^2 e_1 = \alpha \mathcal{A} e_1 + \beta e_1.$$

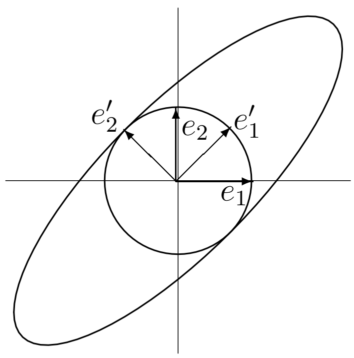
Dobivamo: $\alpha = 4$, $\beta = -3$ i svojstveni polinom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3),$$

i svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3.$$

Svojstvene vektore v_1, v_2 dobivamo iz



Slika 11: Rastezanje ravnine u smjeru svojstvenih vektora

$$v_1 := \mathcal{A}e_1 - 3e_1 = -e_1 + e_2,$$
$$v_2 := \mathcal{A}e_1 - 1e_1 = e_1 + e_2.$$

Nova ortonormirana baza (e_1', e_2') odreena je s

$$e_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2), \qquad e_2' \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2).$$

U novoj bazi (e_1', e_2') matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ postaje dijagonalna matrica $A(e') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Korolar 1. *Svojstvene vrijednosti simetričnog linearnog operatora* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *su realne, a odgovarajući svojstveni vektori međusobno okomiti.*

Dokaz. Dokaz neposredno slijedi iz Teorema 2. Ipak, iz praktičnih razloga navest ćemo alternativni - konstruktivni dokaz ovog korolara.

Svojstvene vrijednosti simetričnog linearnog operatora $\mathcal{A}$ rješenja su kvadratne jednadžbe (7), gdje je A simetrična matrica drugog reda koja u bazi $\{e_1, e_2\}$ pripada linearnom operatoru $\mathcal{A}$. Zbog jednostavnosti označimo: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

Kvadratna jednadžba (7) tada postaje

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0, \tag{11}$$

i ima rješenja

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{D}}{2}, \qquad D = (a-c)^2 + 4b^2.$$

Kako je $D \geq 0$, svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 su realne.

Ako je $D > 0$, svojstvene vrijednosti međusobno su različite ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Svojstvene vektore v_1, v_2, koji pripadaju tim svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2 dobit ćemo tako da svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 redom uvrstimo u (6). Pokažimo da su u tom slučaju odgovarajući svojstveni vektori međusobno okomiti.

Neka je v_1, odnosno v_2, svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_1, odnosno λ_2. Tada vrijedi

$$\mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1, \tag{12}$$

$$\mathcal{A}v_2 = \lambda_1 v_2. \tag{13}$$

Množeći (12) s v_1, (13) s v_2 i koristeći svojstvo simetričnosti linearnog operatora $\mathcal{A}$, dobivamo

$$0 = \mathcal{A}v_1 \cdot v_2 - \mathcal{A}v_2 \cdot v_1 = v_1 v_2 (\lambda_1 - \lambda_2). \tag{14}$$

Kako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mora biti $v_1 v_2 = 0$, tj. u tom slu;aju odgovarajći svojstveni vektori međusobno su okomiti.

Ako je $D = 0$, mora biti

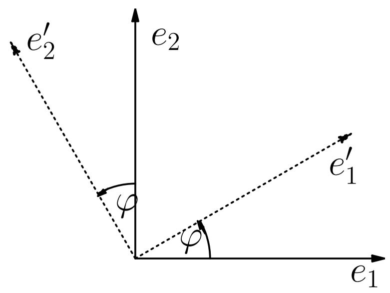
$$c = a \quad \& \quad b = 0,$$

i postoji samo jedna realna svojstvena vrijednost (dvostruka nultočka jednadžbe (11)) $\lambda_1 = \frac{a+c}{2}$. U tom slučaju matrica simetričnog linearnog operatora $\mathcal{A}$ je oblika $A = aI$, a svaki ne-nul vektor $x \in X_0$ je svojstveni vektor operatora $\mathcal{A}$. I u tom slučaju za svojstvene vektore v_1, v_2 možemo izabrati bilo koja dva međusobno okomita vektora. $\square$

Zadatak 17. *Linearni operator* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *zadan je svojim djelovanjem na vektorima baze:* $\mathcal{A}e_1 = 9e_1 + 12e_2$, $\mathcal{A}e_2 = 12e_1 + 16e_2$. *Pokažite da je ovaj linearni operator simetričan. Pronađite njegove svojstvene vrijednosti i odgovarajuće svojstvene vektore.*
Rješenje: $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$, $\quad v_1 = 3e_1 + 4e_2$, $\quad v_2 = -4e_1 + 3e_2$,

5 Ortogonalni operatori u ravnini

Zadan je pravokutni koordninati sustav $(O; e_1, e_2)$ u ravnini M, gdje je (e_1, e_2) ortonormirana baza. Definirajmo novi pravokutni koordninati sustav $(O; e_1', e_2')$ u ravnini koji ćemo dobiti rotacijom koordinatnog susatava $(O; e_1, e_2)$ za kut φ u pozitivnom smjeru oko točke O.



Slika 12: Rotacija koordinatnog sustava

Proizvoljni vektor $x \in X_0(M)$ u bazi (e_1, e_2), odnosno bazi (e_1', e_2') možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + x_2 e_2, \qquad \text{odnosno} \\ x &= y_1 e_1' + y_2 e_2' \end{aligned}$$

Primijetite da zbog svojstva ortonormiranosti bazâ vrijedi

$$\begin{aligned} x &= (x \cdot e_1) e_1 + (x \cdot e_2) e_2, \qquad \text{odnosno} \\ x &= (x \cdot e_1') e_1' + (x \cdot e_2') e_2'. \end{aligned}$$

gdje je $(\cdot)$ oznaka za skalarni produkt. Budući da vrijedi tablica množenja

$\cdot$	e_1'	e_2'
e_1	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
e_2	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$

specijalno za $x = e_1'$, odnosno $x = e_2'$, dobivamo

$$\begin{aligned} e_1' = (e_1' \cdot e_1) e_1 + (e_1' \cdot e_2) e_2 &= \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2, \qquad \text{odnosno} \\ e_2' = (e_2' \cdot e_1) e_1 + (e_2' \cdot e_2) e_2 &= -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2 \end{aligned}$$

Na taj način nove bazne vektore e_2', e_2' prikazali smo u staroj bazi (e_1, e_2). Slično za $x = e_1$, odnosno $x = e_2$, dobivamo

$$\begin{aligned} e_1 = (e_1 \cdot e_1') e_1' + (e_1 \cdot e_2') e_2' &= \cos\varphi e_1' - \sin\varphi e_2', \qquad \text{odnosno} \\ e_2 = (e_2 \cdot e_1') e_1' + (e_2 \cdot e_2') e_2' &= \sin\varphi e_1' + \cos\varphi e_2'. \end{aligned}$$

Na taj način stare bazne vektore e_2, e_2 prikazali smo u novoj bazi (e_1', e_2'). Prema Teoremu 1, str. 9 za bazu (e_1, e_2) i vektore e_1', e_2' postoji jedinstveni linearni operator $\mathcal{U} : X_0 \to X_0$, takav da je

$$\begin{aligned} \mathcal{U}e_1 = e_1' &= \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2, \\ \mathcal{U}e_2 = e_2' &= -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2, \end{aligned}$$

s pripadnom matricom u bazi (e_1, e_2)

$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Kako je $det(U) = 1 > 0$, linearni operator $\mathcal{U}$ prevodi desnu ortonormiranu bazu (e_1, e_2) u desnu ortonormiranu bazu (e_1', e_2').

Zadatak 18. *Provjerite da za proizvoljne $x, y \in X_0(M)$ vrijedi*

- $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y)$
- $\|\mathcal{U}x\| = \|x\|$

Ovo je motivacija za sljedeću definiciju

Definicija 4. Kažemo da je linearni operator $\mathcal{U} : X_0 \to X_0$ **ortogonalan operator** ako je

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y) \quad \forall x, y \in X_0.$$

Zadatak 19. *Provjerite je li linearni operator $\mathcal{V} : X_0 \to X_0$ koji bazu (e_1', e_2') preslikava u bazu (e_1, e_2) ortogonalan? Napišite matricu operatora $\mathcal{V}$ u bazi (e_1', e_2'). Kakvu vezu primjećujete između operatora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$?*

Neka je $P \in M$, točka koja u sustavu $(O; e_1, e_2)$ ima koordinate (x_1, x_2), a u sustavu $(O; e_1', e_2')$ koordinate (x_1', x_2'). Izrazit ćemo koordinate (x_1', x_2') preko koordinata (x_1, x_2). Kako je

$$\begin{aligned} x = \overrightarrow{OP} &= x_1 e_1 + x_2 e_2, \qquad \text{odnosno} \\ &= x_1' e_1' + x_2' e_2', \end{aligned}$$

vrijedi

$$\begin{aligned} x_1' &= (x \cdot e_1') = ((x_1 e_1 + x_2 e_2) \cdot e_1') = x_1(e_1 \cdot e_1') + x_2(e_2 \cdot e_1') = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, \qquad \text{odnosno} \\ x_2' &= (x \cdot e_2') = ((x_1 e_1 + x_2 e_2) \cdot e_2') = x_1(e_1 \cdot e_2') + x_2(e_2 \cdot e_2') = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = U^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Zadatak 20. *Izrazite koordinate (x_1, x_2) preko koordinata (x_1', x_2').*

Zadatak 21. *Kako će se transformirati zadani geometrijski objekt u ravnini ako na njega sukcesivno djeluju simetrični i ortogonalni operatori? Izradite odgovarajući program.*

Zadatak 22. *Pokažite da je linearni operator $\mathcal{H} : X_0 \longrightarrow X_0$, kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica $H = I - \frac{2}{25}\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$ simetričan i ortogonalan. Operator $\mathcal{H}$ u literaturi (vidi primjerice [5], [11], [21], [23], [24], [25]) se naziva Householderov operator. Za vektor $x = 3e_1 + 4e_2$ izračunajte $\mathcal{H}x$. Rezultate prikažite i objasnite geometrijskim prikazom.*

6 Kvadratne forme

Definicija 5. Kvadratnu funkciju dviju varijabli $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \tag{17}$$

nazivamo **kvadratna forma dviju varijabli**.

Definirajmo sada linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \longrightarrow X_0$, kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Matricu A zovemo **matrica kvadratne forme**. Primijetite da je $\mathcal{A}$ simetrični linearni operator.

Pokažimo da se kvadratna forma $q(x_1, x_2)$ može prikazati kao skalarni produkt $\mathcal{A}x \cdot x$, pri čemu je $x \in X_0, \quad x = x_1e_1 + x_2e_2$. Naime, kako je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x = x_1\mathcal{A}e_1 + x_2\mathcal{A}e_2 &= x_1\left(a_{11}e_1 + a_{12}e_2\right) + x_2\left(a_{12}e_1 + a_{22}e_2\right) \\ &= \left(x_1a_{11} + x_2a_{12}\right)e_1 + \left(x_1a_{12} + x_2a_{22}\right)e_2, \end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x \cdot x &= x_1\left(x_1a_{11} + x_2a_{12}\right) + x_2\left(x_1a_{12} + x_2a_{22}\right) \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = q(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Nadalje, prema *Teoremu 2, str. 20* za simetrični linearni operator $\mathcal{A}$ postoji desna ortonormirana baza (e_1', e_2') i realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tako da bude

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2e_2',$$

tj. u novoj bazi (e_1', e_2') linearnom operatoru $\mathcal{A}$ pripada dijagonalna matrica $D = diag\,(\lambda_1, \lambda_2)$. Pri tome se baza (e_1', e_2') od baze (e_1, e_2) dobiva rotacijom za kut φ $(\cos\varphi = e_1 \cdot e_1')$ u pozitivnom smjeru. U novoj bazi (e_1', e_2') vektoru x pripadaju nove koordinate $x = y_1e_1' + y_2e_2'$, a skalarni produkt $\mathcal{A}x \cdot x$ postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x \cdot x &= \left(y_1\mathcal{A}e_1' + y_2\mathcal{A}e_2'\right)\left(y_1e_1' + y_2e_2'\right) \\ &= \left(y_1\lambda_1e_1' + y_2\lambda_2e_2'\right)\left(y_1e_1' + y_2e_2'\right) \\ &= \lambda_1\left(y_1\right)^2 + \lambda_2\left(y_2\right)^2. \end{aligned}$$

Kako prema (15, str. 26) između starih i novih koordinata vektora x postoji ovakva veza

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, \\
y_2 &= -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,
\end{aligned}
$$

onda za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$
a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \lambda_1 \left(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi\right)^2 + \lambda_2 \left(-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi\right)^2 .
$$

Na osnovi definicije jednakosti polinoma dobivamo sljedeće jednakosti

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi \\
a_{22} &= \lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 \cos^2\varphi \\
a_{12} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \sin\varphi \cos\varphi,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Iz ovih jednakosti računamo:

$$
\begin{aligned}
\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sin^2\varphi \cos^2\varphi + \lambda_1\lambda_2 \left(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi\right) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \\
&= \underbrace{\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2\right)}_{=2\lambda_1\lambda_2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi + \lambda_1\lambda_2 \left(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi\right) \\
&= \lambda_1\lambda_2 \left(2\sin^2\varphi \cos^2\varphi + \sin^4\varphi + \cos^4\varphi\right) = \lambda_1\lambda_2 \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)^2 \\
&= \lambda_1\lambda_2, \\
\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} &= \lambda_1 + \lambda_2.
\end{aligned}
$$

Zato koristeći Vieteove formule svojstveni polinom linearnog operatora $\mathcal{A}$ sa svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2 možemo zapisati kao

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\
&= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \\
&= \lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} A + \det A.
\end{aligned}
$$

Primjer 17. *Zadan je pravokutni koordinatni sustav u ravnini* $(O; e_1, e_2)$ *i matrica* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *kvadratne forme.*

Odgovarajuća kvadratna forma je

$$
q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.
$$

Kako je $\operatorname{Tr} A = 4$ i $\det A = 3$, svojstveni polinom simetričnog linearnog operatora $\mathcal{A}$, kome u bazi (e_1, e_2) pripada zadana matrica A, glasi

$$
P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.
$$

Svojstvene vrijednosti (nultočke polinoma P) operatora $\mathcal{A}$ su: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Odgovarajući svojstveni vektori prema *Teoremu 2*, str. 20 dobivamo iz jednadzbe

$$P(\mathcal{A})e = (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{I})\, e = 0, \tag{19}$$

$$v_1 = \mathcal{A}e_1 - \lambda_2 e_1 = -e_1 + e_2, \qquad v_2 = \mathcal{A}e_1 - \lambda_1 e_1 = e_1 + e_2.$$

Da bismo dobili desno orijentieani koordinatni sustav $(O; e_1', e_2')$, umjesto vektora v_2, uzet cemo vektor $(-v_2)$ (jednadžbu (19) pomnožimo s (-1)). Zato je nova ortonormirana baza, u kojoj linearnom operatoru $\mathcal{A}$ pripada dijagonalna matrica $D = diag(1,3)$ zadana s

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-e_1 + e_2)\,, \qquad e_2' = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,(e_1 + e_2)\,.$$

Kako je prema tablici skalarnog množenja na str. 25 $\cos\varphi = e_1 \cdot e_1' = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, kut φ, koji pakazuje veličinu zakreta u pozitivnom smjeru stare baze prema novoj, iznosi $\arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}$.

Kvadratna forma q sada glasi

$$q(y_1, y_2) = 1 \cdot y_1^2 + 3 \cdot y_2^2,$$

gdje je $x = y_1 e_1' + y_2 e_2'$ prikaz vektora x u novoj bazi.

Zadatak 23. *Kut φ zakreta u pozitivnom smjeru stare baze (e_1, e_2) prema novoj bazi (e_1', e_2'), određenoj smjerom svojstvenih vektora linearnog operatora $\mathcal{A}$ kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica A, odredite samo na osnovi poznavanja elemenata matrice A. Pri tome koristite jednakosti iz (18)*

. Rješenje: $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$

6.1 Ispitivanje definitnosti kvadratne forme

Definicija 6. Kažemo da je kvadratna forma dviju varijabli $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

- **pozitivno semidefinitna** ako prima samo nenegativne vrijednosti $(q(x_1, x_2) \geq 0)$;
- **pozitivno definitna** ako je pozitivno semidefinitna i ako je $q(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = 0$;
- **negativno semidefinitna** ako prima samo nepozitivne vrijednosti $(q(x_1, x_2) \leq 0)$;
- **negativno definitna** ako je negativno semidefinitna i ako je $q(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = 0$;
- **indefinitna** ako prima i pozitivne i negativne vrijednosti.

Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini, a (e_1, e_2) ortonormirana baza. Kao što smo vidjeli u prethodnim razmatranjima, za kvadratnu formu $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vrijedi[4]

$$q(x_1, x_2) = \mathcal{A}x \cdot x,$$

gdje je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, a linearni operator $\mathcal{A}$ u bazi (e_1, e_2) zadan je matricom $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$. Osim toga, u novoj ortonormiranoj bazi (e_1', e_2') definiranoj preko svojstvenih vektora linearnog operatora $\mathcal{A}$, vrijedi

$$q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2, \tag{20}$$

gdje je $x = y_1 e_1' + y_2 e_2'$, a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22}.$$

Sada možemo navesti jednostavne kriterije za ispitivanje definitnosti kvadratne forme.

- Kvadratna forma q je **pozitivno definitna** onda i samo onda ako je $a_{11} > 0$ i $\det A > 0$.

  Naime, ako je kvadratna forma q je pozitivno definitna, onda prema (20) mora biti $\lambda_1 > 0 \,\&\, \lambda_2 > 0$. Zbog toga je $\det A > 0$. Nadalje, iz toga slijedi da je $a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0$, tj. $a_{11}a_{22} > 0$, što znači da su a_{11} i a_{22} različiti od nule i istog predznaka. Taj predznak zbog $\mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ mora biti pozitivan.

  Obrnuto, ako je $a_{11} > 0 \quad \& \quad \det A > 0$, najprije primijetimo da zbog $\det A > 0$ vrijedi $a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0$, tj. $a_{11}a_{22} > 0$, što znači da su a_{11}, a_{22} istog predznaka, a kako je po pretpostavci $a_{11} > 0$, mora biti i $a_{22} > 0$. Zbog $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$, λ_1 i λ_2 različiti su od nule i istog predznaka. Taj predznak zbog $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22} > 0$ mora biti pozitivan.

- Kvadratna forma q je **pozitivno semidefinitna** onda i samo onda ako je $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$ i $\det A \geq 0$.

  Dokaz ove tvrdnje može se pokazati na sličan način kao u prethodnom slučaju.

- Kvadratna forma q je **negativno definitna** onda i samo onda ako je $a_{11} < 0$ i $\det A > 0$.

  Dokaz ove tvrdnje može se pokazati na sličan način kao u slučaju pozitivne definitnosti.

- Kvadratna forma q je **negativno semidefinitna** onda i samo onda ako je $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ i $\det A \geq 0$.

  Naime, ako je kvadratna forma q je negativno semidefinitna, onda prema (20) mora biti $\lambda_1 \leq 0 \,\&\, \lambda_2 \leq 0$. Zbog toga je $\det A \geq 0$. Nadalje, iz toga slijedi da je $a_{11}a_{22} \geq a_{12}^2 \geq 0$, što

[4] Zato se često u literaturi govori o definitnosti linearnog operatora ili definitnosti matrice

znači da su a_{11} i a_{22} istog predznaka. Taj predznak zbog $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} \leq 0$ mora biti negativan.

Obrnuto, zbog $\det A = \lambda_1\lambda_2 \geq 0$, λ_1 i λ_2 istog su predznaka. Kako je $a_{11} \leq 0 \,\&\, a_{22} \leq 0$, taj predznak zbog $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} \leq 0$ mora biti negativan.

- Kvadratna forma q je **indefinitna** onda i samo onda ako je $\det A < 0$.

  Dokaz ove tvrdnje može se pokazati na sličan način kao u prethodnim slučajevima.

Primjer 18. *Ispitajmo definitnost kvadratne forme* $q(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$. *Matrica ove kvadratne forme je* $A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. *Kako je* $a_{11} = 9 > 0$, $a_{22} = 1 > 0$ *i* $\det A = 0$, *ova kvadratna forma je pozitivno semidefinitna.*

Zadatak 24. *Ispitajte definitnost kvadratnih formi*

a) $q(x_1, x_2) = -9x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$, *b)* $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2^2$,

c) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$, *d)* $q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$,

e) $q(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2$ *f)* $q(x_1, x_2) = -5x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2$.

Pokušajte primjenom Mathematica-*naredbi* `Plot3D` *i* `ContourPlot` *skicirati grafove odgovarajućih kvadratnih funkcija.*

Rješenje: *a) negativno semidefinitna, b) pozitivno definitna, c) pozitivno definitna, d) indefinitna, e) pozitivno semidefinitna, f) negativno definitna*

Zadatak 25. *Za* $n = 2$ *pokažite da je Grammova matrica* $G(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *iz* Primjedbe **??** *pozitivno definitna odna i samo onda ako su vektori* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *linearno nezavisni*

7 Krivulje drugog reda

Obično se u literaturi pod krivuljom drugog reda u ravnini M podrazumijeva takva krivulja koju proizvoljni pravac siječe najviše u dvije točke. Najpoznatije krivulje drugog reda u ravnini su: kružnica, elipsa, hiperbola i parabola.

Za svaku od navedenih krivulja moguće je izabrati takav pravokutni koordinatni sustav $(O; e_1, e_2)$ u ravnini M da su one opisane sljedećim jednadžbama:

$x^2 + y^2 = r^2$ (kružnica radijusa r sa središtem u točki O)

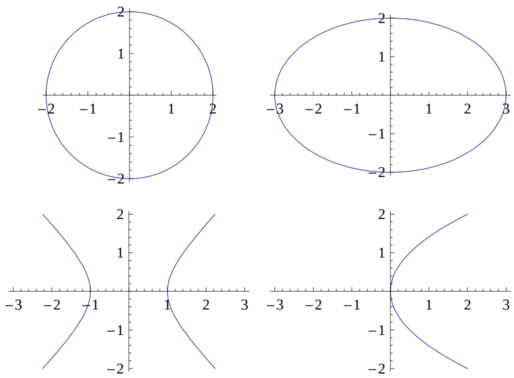
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa s poluosima $a > 0$ i $b > 0$ sa središtem u točki O)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hiperbola s poluosima $a > 0$ i $b > 0$ sa središtem u točki O)

$y^2 = 2px$ (parabola s parametrom p i tjemenom u točki O)

Grafove ovih krivulja možemo lako nacrtati primjenom programskog sustava *Mathematica*. U verziji *Mathematica 6* crtanje implicitno zadanih krivulja radi se primjenom naredbe `ContourPlot`

```
In[1]:= (* Kruznica radijusa 2*)
           slk = ContourPlot[x^2 + y^2 == 2^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
                        Axes -> True, Frame -> False];
        (* Elipsa s poluosima a=3, b=2 *)
           sle = ContourPlot[x^2/3^2 + y^2/2^2 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
                           AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, Frame -> False];
        (* Hiperbola s poluosima a=b=1 *)
           slh = ContourPlot[x^2 - y^2 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
                           AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, Frame -> False];
        (* Parabola s parametrom p=1 *)
           slp = ContourPlot[y^2 == 2 x, {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
                           AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, Frame -> False];
        Print[GraphicsGrid[{{slk, sle}, {slh, slp}}]]
```



Slika 13: Kružnica, elipas, hiperbola i parabola

Krivulje drugog reda u teoriji se obično definiraju kao skup svih nultočaka polinoma drugog reda dviju varijabli $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

pri čemu matrica prisutne kvadratne forme $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ nije nul-matrica, što znači da je barem jedan od koeficijenata koji stoje uz potencije reda 2 različit od nule.

Točka $P(x_1, x_2) \in M$ je nultočka polinoma $\mathcal{P}$ onda ako vrijedi $\mathcal{P}(x_1, x_2) = 0$. Skup svih nultočaka S polinoma $\mathcal{P}$ je podskup u M. U pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ u ravnini M skup svih nultočaka polinoma $\mathcal{P}$ identificira se sa skupom svih rješenja jednadžbe

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0, \qquad a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

Primjenom *Teorema 2,str. 20* može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3. *Neka je $S \subset M$ skup svih nultočaka polinoma $\mathcal{P}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i neka je $A \neq O$ matrica pripadne kvadratne forme. Tada*

1^0 *ako je* $\det A > 0$*, onda je* S *elipsa ili jednočlan ili prazan skup;*

2^0 *ako je* $\det A < 0$*, onda je* S *hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku;*

3^0 *ako je* $\det A = 0$*, onda je* S *parabola ili unija dvaju paralelnih pravaca ili jedan pravac ili prazan skup.*

Dokaz. Ako uvedemo vektore $x = x_1e_1 + x_2e_2$ i $a = a_1e_1 + a_2e_2$, jednadžbu (22) možemo zapisati kao

$$\mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0 = 0, \tag{23}$$

gdje je $\mathcal{A}$ simetrični linearni operator kome je u bazi (e_1, e_2) pridružena matrica A. Prema *Teoremu 2,str. 20* može se pronaći nova ortonormirana baza (e_1', e_2') u kojoj je matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ dijagonalna, čiji su elementi realne svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 operatora $\mathcal{A}$. Vektori x i a dobivaju nove koordinate

$$x = y_1e_1' + y_2e_2', \qquad a = b_1e_1' + b_2e_2',$$

a jednadžba (22), odnosno (23) prelazi u

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + b_1y_1 + b_2y_2 + a_0 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2, a_0 \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Primijetite da u ovoj jednadžbi, za razliku od ekvivalentne jednadžbe (22) više nema mješovitog člana.

Kako je $A \neq O$, barem jedna svojstvena vrijednost linearnog operatora $\mathcal{A}$ je različita od nule. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda_1 \neq 0$. Sada možemo pretpostaviti i da je $\lambda_1 > 0$[5]!

U nastavku dokaz ćemo podijeliti u tri koraka

$$\begin{array}{lllll} I. & \lambda_2 \neq 0 & & \\ II. & \lambda_2 = 0 & \& & b_2 \neq 0 \\ III. & \lambda_2 = 0 & \& & b_2 = 0 \end{array}$$

Slučaj I. Pretpostavimo da je $\lambda_2 \neq 0$. Kako je u ovom slučaju $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, vrijedi

$$\lambda_1y_1^2 + b_1y_1 = \lambda_1\left(y_1 + \tfrac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \tfrac{b_1^2}{4\lambda_1},$$

$$\lambda_2y_2^2 + b_2y_2 = \lambda_2\left(y_2 + \tfrac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 - \tfrac{b_2^2}{4\lambda_2},$$

pa uz oznake

$$z_1 := y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \qquad z_2 := y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2},$$

jednadžba (24) prelazi u

$$\lambda_1z_1^2 + \lambda_2z_2^2 = \gamma, \quad \text{gdje je} \quad \gamma = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a_0. \tag{25}$$

[5] ako nije, jednadžbu (24) možemo pomnožiti s (-1)

Na početku smo utvrdili da smijemo pretpostaviti da je $\lambda_1 > 0$. Obzirom da je u ovom slučaju $\lambda_2 \neq 0$, moguće su dvije situacije:

(i) $\lambda_2 > 0$. Zbog $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$, ova situacija karakterizirana jednostavnim kriterijem: $\det A > 0$.
Kako je u ovom slučaju $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$, jednadžba (25) može predstavljati: elipsu (za $\gamma > 0$, vidi *Primjer 19, str. 35*) ili jednočlan skup (za $\gamma = 0$, vidi *Primjer 20, str. 36*) ili prazan skup (za $\gamma < 0$, vidi *Primjer 21, str. 37*).

(ii) $\lambda_2 < 0$. Ova situacija karakterizirana je kriterijem: $\det A < 0$.
Kako je u ovom slučaju $\lambda_1 > 0$, a $\lambda_2 < 0$, jednadžba (25) može predstavljati: hiperbolu (za $\gamma \neq 0$, vidi *Primjer 22, str. 37*) ili unija dvaju pravaca koji se sijeku (za $\gamma = 0$, vidi *Primjer 23, str. 38*).

Slučaj II. Pretpostavimo da je $\lambda_2 = 0$, ali da je $b_2 \neq 0$.
U ovom slučaju jednadžbu (24) možemo zapisati u obliku

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2 + \beta = 0, \tag{26}$$

gdje je

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2, \qquad \beta = a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}.$$

Jednadžba (26) predstavlja parabolu (vidi *Primjer 24, str. 40*).

Slučaj III. Pretpostavimo da je $\lambda_2 = 0$ i da je $b_2 = 0$.
Sada je jednadžba (24) sasvim jednostavna

$$\lambda_1 y_1^2 + b_1 y_1 + a_0 = 0,$$

i nakon dijeljenja s λ_1 i svođenja na potpuni kvadrat postaje

$$\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + 0 \cdot y_2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1^2} + \frac{a_0}{\lambda_1} = 0$$

i može se zapisati u obliku

$$z_1^2 + 0 \cdot z_2 = \gamma, \tag{27}$$

gdje je

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2, \qquad \gamma = \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{b_1^2}{4\lambda_1} - a_0\right).$$

Skup svih rješenja jednadžbe (27) za $\gamma < 0$ je **prazan skup**, za $\gamma = 0$ to je **pravac** $z_1 + 0 \cdot z_2 = 0$, a za $\gamma > 0$ to je **unija paralelnih pravaca** (vidi *Primjer 21, str. 37*).

$$z_1 + 0 \cdot z_2 = \sqrt{\gamma}, \qquad z_1 + 0 \cdot z_2 = -\sqrt{\gamma}.$$

Time je dokaz teorema kompletiran. ♣

Primjer 19. *U pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ treba odrediti skup svih rješenja jednadžbe*

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 - 1 = 0.$$

Kako je u ovom slučaju matrica prisutne kvadratne forme $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, vektor $a = 4e_1 + 8e_2$, $a_0 = -1$, a vektor $x = x_1e_1 + x_2e_2$, zadanu jednadžbu u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ možemo zapisati kao

$$\mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0 = 0, \qquad (*)$$

gdje je $\mathcal{A}$ simetrični linearni operator kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica A. Svojstvene vrijednosti ovog linearnog operatora su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 1$. Odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori prema *Teoremu 2, str. 20* su

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 + e_2\right), \qquad e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-e_1 + e_2\right).$$

Prikazi vektora a i x u novoj bazi (e_1', e_2') su:

$$\begin{aligned} a &= (a \cdot e_1')e_1' + (a \cdot e_2')e_2' = \tfrac{12}{\sqrt{2}}e_1' + \tfrac{4}{\sqrt{2}}e_2' = 6\sqrt{2}e_1' + 2\sqrt{2}e_2', \\ x &= y_1e_1' + y_2e_2'. \end{aligned}$$

Kako je $\det A = 3 > 0$, a broj $\gamma = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a_0 = 9$, u ovom slučaju skup svih rješenja zadane jednadžbe je **elipsa**. Pokušajmo je nacrtati.

Kvadratna jednadžba (*) u novom pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1', e_2')$ glasi

$$3y_1^2 + y_2^2 + 6\sqrt{2}y_1 + 2\sqrt{2}y_2 - 1 = 0, \qquad (2*)$$

što možemo zapisati u obliku

$$3\left(y_1 + \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_2 + \sqrt{2}\right)^2 = 9. \qquad (3*)$$

Ovo je elipsa s centrom u točki $O_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ i poluosima $\sqrt{3}$ i 3. Ako ishodište O novog koordinatnog sustava $(O; e_1', e_2')$ pomaknemo tu točku, onda jednadžba elipse $(3*)$ u koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ glasi

$$3z_1^2 + z_2^2 = 9, \qquad (4*)$$

Kako je $\overrightarrow{OO_1} = -\sqrt{2}e_1' - \sqrt{2}e_2' = -2e_2$, veza između koordinata neke točke $T \in M$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ dana je sljedećom vektorskom jednakošću

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 = \overrightarrow{OO_1} + z_1e_1' + z_2e_2' = -2e_2 + \frac{z_1}{\sqrt{2}}\left(e_1 + e_2\right) + \frac{z_2}{\sqrt{2}}\left(-e_1 + e_2\right),$$

odakle dobivamo

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2), \qquad x_2 = -2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2),$$

odnosno

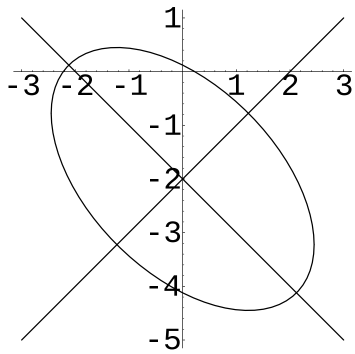
$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2 + x_1 + x_2\right), \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2 + x_2 - x_1\right).$$

Zato jednadžba elipse $(4*)$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ glasi

$$3\,(2 + x_1 + x_2)^2 + (2 + x_2 - x_1)^2 = 18, \qquad (5*)$$

što odgovara polaznoj jednadžbi. Primijetite da se ova formula također može dobiti iz formule (3*) korištenjem veze (16), str. 26

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = U^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$



Slika 14: Skup svih rješenja jednadžbe $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 - 1 = 0$

Primjedba 1. Sva navedena izračunavanja i izradu odgovarajućeg crteža može se napraviti primjenom programskog sustava *Mathematica* – vidi program `Krivulja2` na `http://www.mathos.hr/~geometrija`.

Primjer 20. *U pravokutnom koordinatnom sustavu* $(O; e_1, e_2)$ *treba odrediti skup svih rješenja jednadžbe*

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 4\sqrt{2}x_2 + 4 = 0.$$

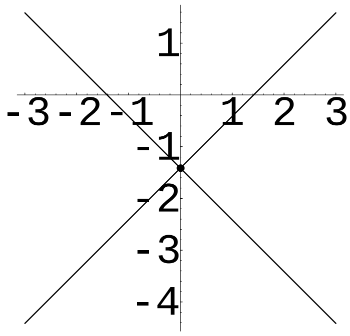
Kako su u ovom primjeru matrica prisutne kvadratne forme i odgovarajući linearni operator isti kao u prethodnom primjeru, i svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori su isti[6]. U novoj bazi je $a = 6e_1' + 2e_2'$. Kako je u ovom slučaju $\det A = 3 > 0$ i $\gamma = 0$, skup svih rješenja zadane kvadratne jednadžbe "stegao se" na **jednu točku**.

Polazna kvadratna jednadžba u novom koordinatnom sustavu $(O; e_1', e_2')$ transformira se u

$$3y_1^2 + y_2^2 + 6y_1 + 2y_2 + 4 = 0, \quad \text{odnosno} \quad 3\,(y_1 + 1)^2 + (y_2 + 1)^2 = 0,$$

čije je rješenje jedna točka $T = (-1, -1)$, čije koordinate u sustavu $(O; e_1, e_2)$ su $(0, -\sqrt{2})$.

[6] Potrebna izračunavanja i izradu odgovarajućeg crteža napravit ćemo primjenom programa `Krivulja2` sa `http://www.mathos.hr/ geometrija`



Slika 15: Skup svih rješenja jednadžbe $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 4\sqrt{2}x_2 + 4 = 0$

Primjer 21. *U pravokutnom koordinatnom sustavu* $(O; e_1, e_2)$ *treba odrediti skup svih rješenja jednadžbe*

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 4\sqrt{2}x_2 + 5 = 0.$$

Kako su u ovom primjeru matrica prisutne kvadratne forme i odgovarajući linearni operator isti kao u prethodnim primjerima, i svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori su isti. U novoj bazi je $a = 6e_1' + 2e_2'$. Kako je u ovom slučaju $\det A = 3 > 0$, a $\gamma = -1$, skup svih rješenja zadane kvadratne jednadžbe je **prazan skup**.

Polaznu kvadratnu jednadžbu u novom koordinatnom sustavu $(O; e_1', e_2')$ transformira se u

$$3y_1^2 + y_2^2 + 6y_1 + 2y_2 + 5 = 0, \quad \text{odnosno} \quad 3\,(y_1 + 1)^2 + (y_2 + 1)^2 = -1.$$

Očigledno, ne postoje takvi realni brojevi y_1, y_2 koji bi zadovoljavali ovu jednadžbu.

Primjer 22. *U pravokutnom koordinatnom sustavu* $(O; e_1, e_2)$ *treba odrediti skup svih rješenja jednadžbe*

$$5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 - 1 = 0.$$

Kako je u ovom slučaju matrica prisutne kvadratne forme $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, vektor $a = 6e_1 + 2e_2$, $a_0 = -1$, a vektor $x = x_1e_1 + x_2e_2$, zadanu jednadžbu u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ možemo zapisati kao

$$\mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0 = 0, \qquad (*)$$

gdje je $\mathcal{A}$ simetrični linearni operator kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica A. Svojstvene vrijednosti ovog linearnog operatora su $\lambda_1 = 6$ i $\lambda_2 = -4$. Odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori prema *Teoremu 2, str. 20* su

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{10}}\,(3e_1 + e_2)\,, \qquad e_2' = \frac{1}{\sqrt{10}}\,(-e_1 + 3e_2)\,.$$

Prikazi vektora a i x u novoj bazi (e_1', e_2') su:

$$a = (a \cdot e_1')e_1' + (a \cdot e_2')e_2' = 2\sqrt{10}e_1',$$
$$x = y_1e_1' + y_2e_2'.$$

Kako je $\det A = -24 < 0$, a broj $\gamma = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a_0 = \frac{8}{3}$, u ovom slučaju skup svih rješenja zadane jednadžbe je **hiperbola**.

Kvadratna jednadžba (*) u novom pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1', e_2')$ glasi

$$6y_1^2 - 4y_2^2 + 2\sqrt{10}y_1 - 1 = 0, \qquad (2*)$$

što možemo zapisati u obliku

$$6\left(y_1 + \frac{\sqrt{10}}{6}\right)^2 - 4y_2^2 = \frac{8}{3}. \qquad (3*)$$

U koordinatnom sustavu $(O; e_1', e_2')$ ovo je hiperbola s centrom u točki $O_1 = (-\frac{\sqrt{10}}{6}, 0)$. Ako ishodište O novog koordinatnog sustava $(O; e_1', e_2')$ pomaknemo tu točku, onda jednadžba hiperbole $(3*)$ u koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ glasi

$$6z_1^2 - 4z_2^2 = \frac{8}{3}, \qquad (4*)$$

Kako je $\overrightarrow{OO_1} = -\frac{\sqrt{10}}{6}e_1' = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{6}e_2$, veza između koordinata neke točke $T \in M$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ dana je sljedećom vektorskom jednakošću

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 = \overrightarrow{OO_1} + z_1e_1' + z_2e_2' = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{6}e_2 + \frac{z_1}{\sqrt{10}}(3e_1 + e_2) + \frac{z_2}{\sqrt{10}}(-e_1 + 3e_2),$$

odakle dobivamo

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3z_1}{\sqrt{10}} - \frac{z_2}{\sqrt{10}}, \qquad x_2 = -\frac{1}{6} + \frac{z_1}{\sqrt{10}} + 3\frac{z_2}{\sqrt{10}},$$

odnosno

$$z_1 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(5 + 9x_1 + 3x_2), \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-x_1 + 3x_2).$$

Zato jednadžba hiperbole $(4*)$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ glasi

$$(5 + 9x_1 + 3x_2)^2 - 6(-x_1 + 3x_2)^2 = 40, \qquad (5*)$$

što odgovara polaznoj jednadžbi.

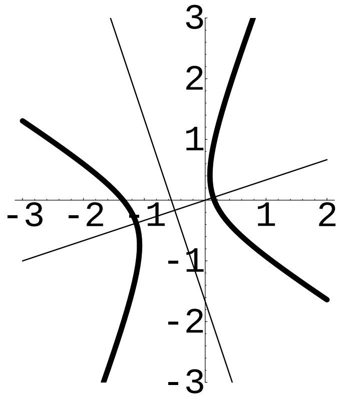
Primjer 23. *U pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ treba odrediti skup svih rješenja jednadžbe*

$$5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 + \frac{5}{3} = 0.$$

Kako su u ovom primjeru matrica prisutne kvadratne forme i odgovarajući linearni operator isti kao u prethodnom primjeru, i svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori su isti. U novoj bazi je $a = 2\sqrt{10}e_1'$. Budući da je u ovom slučaju $\det A = -24 < 0$ i $\gamma = 0$, skup svih rješenja zadane kvadratne jednadžbe je **unija dvaju pravaca koji se sjeku**.

Polazna kvadratna jednadžba u novom koordinatnom sustavu $(O; e_1', e_2')$ transformira se u

$$6y_1^2 - 4y_2^2 + 2\sqrt{10}y_1 + \frac{5}{3} = 0, \quad \text{odnosno} \quad 3\left(y_1 + \frac{\sqrt{10}}{6}\right)^2 - 2y_2^2 = 0, \qquad (*)$$



Slika 16: Skup svih rješenja jednadžbe $5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 - 1 = 0$

čije je rješenje unija pravaca

$$y_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\left(y_1 + \frac{\sqrt{10}}{6}\right), \qquad y_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}}\left(y_1 + \frac{\sqrt{10}}{6}\right) \qquad (2*).$$

koji se u koordinatnom sustavu $(O; e_1', e_2')$ sijeku u točki $T = (-\frac{\sqrt{10}}{6}, 0)$.

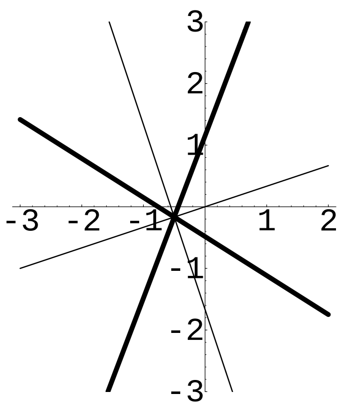
Ako ishodište O novog koordinatnog sustava $(O; e_1', e_2')$ pomaknemo tu točku, onda jednadžba $(*)$ u koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ glasi

$$3z_1^2 - 2z_2^2 = 0, \qquad (3*)$$

Iskoristivši veze između koordinata neke točke $T \in M$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ iz prethodnog primjera jednadžba $(3*)$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ glasi

$$(5 + 9x_1 + 3x_2)^2 - 6\,(-x_1 + 3x_2)^2 = 0,$$

što odgovara polaznoj jednadžbi.



Slika 17: Skup svih rješenja jednadžbe $5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 + \frac{5}{3} = 0$

Zadatak 26. *Kako glase jednadžbe pravaca* $(2*)$ *iz prethodnog primjera i u kojoj se točki sijeku u koordinatnom sustavu* $(O; e_1, e_2)$ *?*

Primjer 24. *U pravokutnom koordinatnom sustavu* $(O; e_1, e_2)$ *treba odrediti skup svih rješenja jednadžbe*

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 50x_1 - 100x_2 + 25 = 0.$$

Kako je u ovom slučaju matrica prisutne kvadratne forme $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$, vektor $a = 50e_1 - 100e_2$, $a_0 = 25$, a vektor $x = x_1e_1 + x_2e_2$, zadanu jednadžbu u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ možemo zapisati kao

$$\mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0 = 0, \qquad (*)$$

gdje je $\mathcal{A}$ simetrični linearni operator kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica A. Svojstvene vrijednosti ovog linearnog operatora su $\lambda_1 = 25$ i $\lambda_2 = 0$. Odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori prema *Teoremu 2, str. 20* su

$$e_1' = \frac{1}{5}\left(3e_1 + 4e_2\right), \qquad e_2' = \frac{1}{5}\left(-4e_1 + 3e_2\right).$$

Prikazi vektora a i x u novoj bazi (e_1', e_2') su:

$$\begin{aligned} a &= (a \cdot e_1')e_1' + (a \cdot e_2')e_2' = -50e_1' - 100e_2', \\ x &= y_1e_1' + y_2e_2'. \end{aligned}$$

Kako je $\det A = 0$, a broj $\beta = \frac{b_2}{\lambda_1} = -4 \neq 0$, u ovom slučaju skup svih rješenja zadane jednadžbe je **parabola**. Pokušajmo je nacrtati.

Kvadratna jednadžba (*) u novom pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1', e_2')$ glasi

$$25y_1^2 - 50y_1 - 100y_2 + 25 = 0, \qquad (2*)$$

što možemo zapisati u obliku

$$(y_1 - 1)^2 - 4y_2 = 0. \qquad (3*)$$

Ovo je parabola s tjemenom u točki $O_1 = (1, 0)$ i parametrom 2. Ako ishodište O novog koordinatnog sustava $(O; e_1', e_2')$ pomaknemo tu točku, onda jednadžba parabole $(3*)$ u koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ glasi

$$z_1^2 - 4z_2 = 0, \qquad (4*)$$

Kako je $\overrightarrow{OO_1} = -\sqrt{2}e_1' - \sqrt{2}e_2' = \frac{1}{5}\left(3e_1 + 4e_2\right)$, veza između koordinata neke točke $T \in M$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ dana je sljedećom vektorskom jednakošću

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 = \overrightarrow{OO_1} + z_1e_1' + z_2e_2' = \frac{1}{5}\left(3e_1 + 4e_2\right) + \frac{z_1}{5}\left(3e_1 + 4e_2\right) + \frac{z_2}{5}\left(-4e_1 + 3e_2\right),$$

odakle dobivamo

$$x_1 = \frac{1}{5}(3 + 3z_1 - 4z_2), \qquad x_2 = \frac{1}{5}(4 + 4z_1 + 3z_2),$$

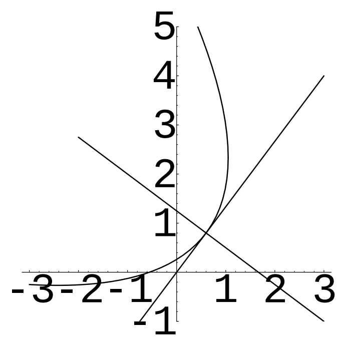
odnosno

$$z_1 = \frac{1}{5}\,(3x_1 + 4x_2 - 5)\,, \qquad z_2 = \frac{1}{5}\,(-4x_1 + 3x_2)\,.$$

Zato jednadžba parabole $(4*)$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ glasi

$$(3x_1 + 4x_2 - 5)^2 - 20\,(-4x_1 + 3x_2) = 0, \qquad (5*)$$

što odgovara polaznoj jednadžbi.



Slika 18: Skup svih rješenja jednadžbe $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 50x_1 - 100x_2 + 25 = 0$

[7]

Literatura

[1] D. Blanuša, *Viša matematika I-1, I-2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

[2] T. S. Blyth, E. F, Robertson, *Basic Linear Algebra*, Springer-Verlag, London, 2002.

[3] D. Butković, *Kompleksni konačno dimenzionalni vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004

[4] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[5] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[6] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2003.

[7] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear algebra*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[8] Е. И. Гурскиї, Основы линеїної алгебры и аналитицескої геометрии, Вышеїшая школа, Минск, 1982.

[7] Naveden je nešto opsežniji popis literature, ali sve su to knjige pomoću kojih student može utvrditi ili proširiti svoje znanje, a dostupne su u biblioteci Odjela za matematiku

[9] K. Janich, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[10] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[11] D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[12] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2005

[13] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[14] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[15] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Наука, Москва, 1968.

[16] S. Lipschutz, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.

[17] S. Lipschutz, *Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1991.

[18] S. Lipschutz, *3000 Solved Problems in Linear Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1989.

[19] E. D. Nering, *Linear algebra and matrix theory*, John Wiley & Sons, New York, 1963.

[20] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. Blickensdörfer-Ehlers, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991

[21] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[22] И. В. Проскуряков, *Problems in linear algebra*, Мир, Москва, 1978.

[23] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

[24] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1, 2*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.

[25] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.

[26] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1998, 2003.

[27] Zhang, Fuzhen, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.