Linearni operatori u ravnini

Rudolf Scitovski

Ivana Kuzmanović, Zoran Tomljanović

1 Uvod

Neka je $(O; e_1, e_2, e_3)$ pravokutni koordinatne sustav u prostoru $X_0(E)$. Analogno kao i u ravnini M definira se i linearni operator u prostoru $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ za kojeg vrijedi

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathcal{A}(x) + \mu \mathcal{A}(y) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in X_0. \tag{1}$$

Slično kao što smo pokazali u slučaju linearnih operatora u ravnini i ovdje se može pokazati da je dovoljno linearni operator definirati samo na baznim vektorima i da se tada njegovo djelovanje može prikazati kvadratnom matricom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

gdje i-ti stupac predstavlja djelovanje linearnog operatora $\mathcal{A}$ na i-ti bazni vektor.

I obrnuto, ako je (e_1, e_2, e_3) baza u X_0, a v_1, v_2, v_3 bilo koja tri vektora iz X_0, onda postoji jedinstven linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$, takav da je

$$\mathcal{A}e_1 = v_1, \quad \mathcal{A}e_2 = v_2, \quad \mathcal{A}e_3 = v_3.$$

Primjer 1. (Centralna simetrija obzirom na ishodište koordinatnog sustava). *Ako je $P \in E$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2, x_3), onda je njena centralno simetrična slika u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava točka P' s koordinatam $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Točki P pridružimo radijvektor $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, a točki P' radijvektor $x' = -x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3$. Sada možemo definirati operator centralne simetrije $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$*

$$\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = -x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3.$$

Primijetite da je na taj način definirana vrijednost ovog operatora za svaki vektor $x \in X_0$, da je tako definirani operator linearan, tj. vrijedi (1) i da mu u bazi (e_1, e_2, e_3) pripada matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2. (Simetrija u odnosu na x_1x_2 ravninu). *Ako je $P \in E$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2, x_3), onda je njena simetrična slika u odnosu na ravninu x_1x_2 točka P' s koordinatam $(x_1, x_2, -x_3)$. Točki P pridružimo radijvektor $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, a točki P' radijvektor $x' = x_1e_1 + x_2e_2 - x_3e_3$. Sada možemo definirati operator simetrije u odnosu na x_1x_2 ravninu $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$*

$$\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1e_1 + x_2e_2 - x_3e_3.$$

Primijetite da je na taj način definirana vrijednost ovog operatora za svaki vektor $x \in X_0$, da je tako definirani operator linearan, tj. vrijedi (1) i da mu u bazi (e_1, e_2, e_3) pripada matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naka je $\mathcal{L}(X_0)$ skup svih linearnih operatora na prostoru X_0. Također slično kao u slučaju linearnih operatora u ravnini i na skupu $\mathcal{L}(X_0)$ može se definirati množenje sa skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ zbrajanje i kompozicija (množenje) dva linearna operatora $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X_0)$:

$$\begin{aligned} (\alpha\mathcal{A})\, x &= \alpha\,(\mathcal{A}x)\,, \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B})\, x &= \mathcal{A}x + \mathcal{B}x, \\ (\mathcal{A}\mathcal{B})\, x &= \mathcal{A}\,(\mathcal{B}x)\,, \end{aligned}$$

i da za ovako definirane operacije vrijede sva ona svojstva koja smo naveli u slučaju linearnih operatora u ravnini.

Također, i za kvadratne matrice trećeg reda kojima prikazujemo djelovanje linearnog operatora u nekoj bazi, vrijede sve operacije i svojstva kao i u slučaju kvadratnih matrica drugog reda (detaljnije vidi primjerice u (13)).

Analogno kao i u ravnini možemo definirati i **svojstvene (karakteristične) vrijednosti** i **svojstvene (karakteristične) vektore** linearnih operatora iz $\mathcal{L}(X_0)$

Definicija 1. Kažemo da je kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}$ svojstvena (karakteristična) vrijednost linearnog operatora $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ ako postoji nenul vektor $x \neq 0$, takav da bude

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \tag{2}$$

pri čemu vektor x nazivamo svojstveni (karakteristični) vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.

Može se pokazati da vrijedi (vidi (13))

Teorem 1. *Za linearni operator $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X_0)$ postoji realni broj $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i vektor $x \neq 0$ takvi da je $\mathcal{A}x = \lambda_0 x$.*

2 Simetrični linearni operatori u prostoru

Definicija 2. Kažemo da je linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ **simetričan** ako vrijedi

$$\mathcal{A}x \cdot y = x \cdot \mathcal{A}y, \quad \forall x, y \in X_0. \tag{3}$$

Primjer 3. *Neka je $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ baza u X_0 i neka je $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Definirajmo linearni operator propisivanjem njegova djelovanja na bazne vektore*

$$\mathcal{A}e_1 = \alpha_1 e_1, \quad \mathcal{A}e_2 = \alpha_2 e_2, \quad \mathcal{A}e_3 = \alpha_3 e_3$$

Direktno se može provjeriti da je ovo simetrični linearni operator. Njegova matrica u bazi (e) je dijagonalna matrica $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Djelovanje linearnog operatora $\mathcal{A}$ možemo shvatiti kao djelovanje kompozicije $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, gdje je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 x &= \alpha_1 x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad &&\text{(kontrakcija u smjeru prve koordinatne osi)}\\
\mathcal{A}_2 x &= x_1 e_1 + \alpha_2 x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad &&\text{(kontrakcija u smjeru druge koordinatne osi)}\\
\mathcal{A}_3 x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \alpha_2 x_3 e_3 \quad &&\text{(kontrakcija u smjeru treće koordinatne osi)}
\end{aligned}$$

Ako je $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$, onda linearni operator $\mathcal{A}$ preslikava jediničnu sferu sa središem u ishodištu

$$\partial\mathcal{K}(O,1) = \Big\{(x_1, x_2 x_3) \in E : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\Big\}$$

u **elipsoid** s centromu ishodištu i poluosima $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\mathcal{E}(O; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left\{(x_1, x_2 x_3) \in E : \quad \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1\right\}$$

Naime, djelovanjem linearnog operatora $\mathcal{A}$ neka točka na sferi $T(x_1, x_2 x_3) \in \partial\mathcal{K}$ preslikava se u točku $T(x_1', x_2' x_3')$, pri čemu je

$$\mathcal{A}x = x_1\mathcal{A}e_1 + x_2\mathcal{A}e_2 + x_3\mathcal{A}e_3 = x_1\alpha_1 e_1 + x_2\alpha_2 e_2 + x_3\alpha_3 e_3.$$

Ako komponente novog vektora $\mathcal{A}x$ označimo s (x_1', x_2', x_3'), onda vrijedi: $x_1 = \frac{x_1'}{\alpha_1}, \quad x_2 = \frac{x_2'}{\alpha_2}, \quad x_3 = \frac{x_3'}{\alpha_3}$, pa iz

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_1'^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2'^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3'^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

Teorem 2. *Ako je $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ simetrični linearni operator na vektorskom prostoru $X_0 = X_0(E)$, onda postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ i ortonormirana baza (e_1', e_2', e_3') vektorskog prostora X_0, tako da bude*

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2' \qquad \mathcal{A}e_3' = \lambda_1 e_3'.$$

Drugim riječima za simetrični linearni operator možemo pronaći takvu desnu ortonormiranu bazu u kojoj tom operatoru pripada dijagonalna matrica.

Primjer 4. *Linearni operator* $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ *u bazi* $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ *definiran je s:* $\mathcal{A}e_1 = e_2$*,* $\mathcal{A}e_2 = e_1 + e_3$*,* $\mathcal{A}e_3 = e_2$*.*

Matrica ovog linearnog operatora u bazi (e) je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, a svojstveni polinom prema (13) ili (14) možemo izračunati po formuli

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \mathrm{Tr}\, A + \lambda \left(\sum_{i=1}^{3} M_{ii} \right) - \det A, \tag{4}$$

gdje su M_{ii} glavni minori determinante $\det A$. U našem slučaju dobivamo

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 0 \cdot \lambda^2 + (-1 + 0 - 1)\lambda - 0 = \lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}),$$

pa dobivamo svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 0$. Odgovarajuće svojstvene vektore dobivamo iz jednakosti (vidi (13))

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{A})e_1 &= (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I})\, e_1 = 0 \qquad \text{(što možemo pisati:)} \\
P(\mathcal{A})e_1 &= (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})\, v_1, \\
v_1 &= (\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I})\, e_1 = \left(\mathcal{A} - \sqrt{2}\mathcal{I}\right) \mathcal{A}e_1 = \left(\mathcal{A} - \sqrt{2}\mathcal{I}\right) e_2 = e_1 + e_3 - \sqrt{2}e_2, \\
P(\mathcal{A})e_1 &= (\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})\, v_2, \\
v_2 &= (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I})\, e_1 = \left(\mathcal{A} + \sqrt{2}\mathcal{I}\right) \mathcal{A}e_1 = \left(\mathcal{A} + \sqrt{2}\mathcal{I}\right) e_2 = e_1 + e_3 + \sqrt{2}e_2, \\
P(\mathcal{A})e_1 &= (\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I})\, v_3, \\
v_3 &= (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})\, e_1 = \left(\mathcal{A} + \sqrt{2}\mathcal{I}\right)\left(\mathcal{A} - \sqrt{2}\mathcal{I}\right) e_1 = (\mathcal{A}^2 - 2\mathcal{I})\, e_1 = -e_1 + e_3.
\end{aligned}$$

Primijetite da je prilikom izračunavanja trećeg svojstvenog vektora bilo potrebno poznavati samo prvi stupac matrice A^2. Desnu ortonormiranu bazu sada lako dobivamo

$$e_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2}\left(e_1 - \sqrt{2}e_2 + e_3\right), \quad e_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{2}\left(e_1 + \sqrt{2}e_2 + e_3\right), \quad e_3' = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-e_1 + e_3\right).$$

U bazi $(e') = (e_1', e_2', e_3')$ linearnom operatoru $\mathcal{A}$ pripada dijagonalna matrica $D = diag(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ jer je

$$\mathcal{A}e_1' = -\sqrt{2}a_1 e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \sqrt{2}e_2' \qquad \mathcal{A}e_3' = 0 \cdot e_3'.$$

Sada možemo definirati i **ortogonalni** linearni operator $\mathcal{U} : X_0 \to X_0$ koji staru bazu (e) prevodi u novu (e')

$$\mathcal{U}e_1 = e_1', \quad \mathcal{U}e_2 = e_2', \quad \mathcal{U}e_3 = e_3',$$

kome u bazi (e) pripada **ortogonalna matrica**

$$U(e) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Primijetite da ako retke, odnosno stupce, ove matrice shvatimo kao komponente nekih vektora, onda lako možemo provjeriti da su ti vektori ortonormirani.

Zadatak 1. *Po definiciji provjerite da je operator $\mathcal{U}$ ortogonalan, tj. da vrijedi*

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}x \cdot \mathcal{U}y = x \cdot y \quad \forall x, y \in X_0, \\ &\|\mathcal{U}x\| = \|x\|. \end{aligned}$$

3 Plohe drugog reda

Plohe drugog reda u teoriji se obično definiraju kao skup svih nultočaka polinoma drugog reda triju varijabli $\mathcal{P}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(x_1, x_2, x_3) \;&=\; a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0, \\ & a_{i,j}, a_i, a_0 \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{5}$$

pri čemu matrica prisutne kvadratne forme $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ nije nul-matrica, što znači da je barem jedan od koeficijenata koji stoje uz potencije reda 2 različit od nule.

Točka $T_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in E$ je nultočka polinoma $\mathcal{P}_2$ onda ako vrijedi $\mathcal{P}_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0$. Skup svih nultočaka S polinoma $\mathcal{P}_2$ je podskup u E. U pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2, e_3)$ u prostoru E skup svih nultočaka polinoma $\mathcal{P}_2$ identificira se sa skupom svih rješenja jednadžbe

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0, \\ & a_{i,j}, a_i, a_0 \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{6}$$

Neka je nadalje $\mathcal{A}$ simetrični linearni operator kome u bazi $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ pripada matrica $A(e)$. Ako još označimo $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ i $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, tada prethodnu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0. \tag{7}$$

Sukladno *Teoremu 2* postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ i nova ortonormirana baza $(e') = (e_1', e_2', e_3')$, tako da je

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2' \qquad \mathcal{A}e_3' = \lambda_1 e_3'.$$

Ako još u toj novoj bazi prikažemo i vektore x i a,

$$x = y_1 e_1' + y_2 e_2' + y_3 e_3', \qquad a = b_1 e_1' + b_2 e_2' + b_3 e_3',$$

onda jednadžba (7), odnosno (6) postaje jednostavnija

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + a_0 = 0 \tag{8}$$

Primjer 5. *Treba pronaći skup svih rješenja jednadžbe*

$$7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 6x_1 - 24x_2 + 18x_3 + 30 = 0.$$

Matrica prisutne kvadratne forme je $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Svojstveni polinom pridruženog linearnog operatora $\mathcal{A}$ prema (4) je $P(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162$. Njegove nultočke su svojstvene vrijednosti linearnog operatora $\mathcal{A}$

$$\lambda_1 = 9, \qquad \lambda_2 = 6, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Odgovarajući svojstveni vektori redom su

$$\begin{aligned}
v_1 &= (\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I})\, e_1 = 4\,(2e_1 - 2e_2 + e_3)\,, \\
v_2 &= (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I})\, e_1 = 2\,(-2e_1 - e_2 + 2e_3)\,, \\
v_3 &= (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})\, e_1 = 2\,(e_1 + 2e_2 + 2e_3)\,,
\end{aligned}$$

odakle dobivamo novu ortonormiranu bazu

$$e_1' = \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3)\,, \quad e_2' = \frac{1}{3}(-2e_1 - e_2 + 2e_3)\,, \quad e_3' = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + 2e_3)\,.$$

Vektor a u staroj bazi (e) glasi $a = -6e_1 - 24e_2 + 18e_3$. Označimo njegove komponente u novoj bazi (e') s b_1, b_2, b_3. Kako je $b_i = a \cdot e_i'$, $i = 1, 2, 3$, dobivamo prikaz vektora a u novoj bazi (e')

$$a = (a \cdot e_1')e_1' + (a \cdot e_2')e_2' + (a \cdot e_3')e_3' = 18e_1' + 24e_2' - 6e_3'.$$

Zato polazna jednadžba postaje

$$9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2 + 18y_1 + 24y_2 - 6y_3 + 30 = 0,$$

što možemo zapisati u obliku

$$\frac{(y_1+1)^2}{2/3} + \frac{(y_2+2)^2}{1} + \frac{(y_3-1)^2}{2} = 1,$$

što predstavlja jednadžbu elipsoida s centrom u točki $(-1, -2, 1)$ s osima paralelnim koordinatnim osima i duljinom poluosi: $\sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{2}$.

Primjenom programskog sustava *Mathematica* nacrtat ćemo plohu ovog elipsoida niže navedenim naredbama. Najprije napišimo njegovu jednadžbu u parametarskom obliku

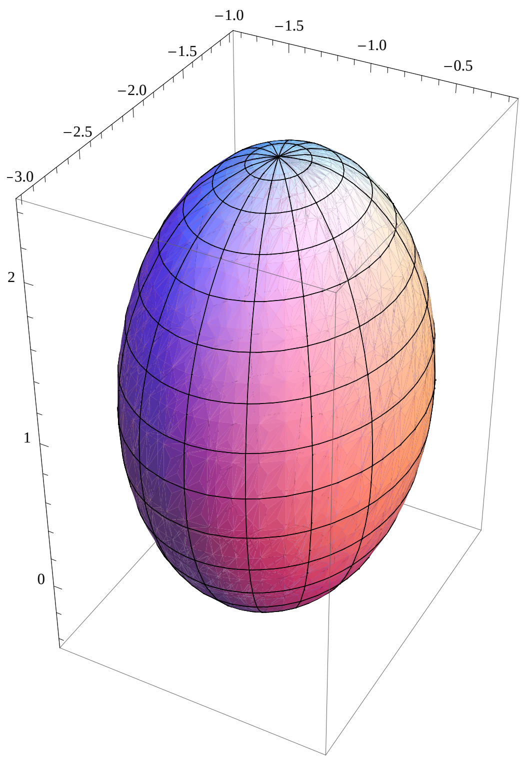
$$y_1 = -1 + \sqrt{2/3}\cos u \cos v, \qquad y_2 = -2 + \sin u \cos v, \qquad y_3 = 1 + \sqrt{2}\sin v,$$
$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Naime, lako se vidi da odavde kvadriranjem slijedi

$$\frac{(y_1+1)^2}{2/3} + \frac{(y_2+2)^2}{1} + \frac{(y_3-1)^2}{2} = \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v = 1.$$

Nize navedenim *Mathematica* programom nacrtat ćemo odgovarajuću plohu ovog elipsoida.

```
In[1]:= ParametricPlot3D[{-1 + Sqrt[2/3]Cos[u]Cos[v],
                          -2 + Sin[u]Cos[v],
                           1 + Sqrt[2]Sin[v]},
                          {u, 0, 2Pi, Pi/20}, {v, -Pi/2, Pi/2, Pi/20},
                         Shading -> False]
```



Slika 1: Elipsoid: $\frac{(y_1+1)^2}{2/3} + \frac{(y_2+2)^2}{1} + \frac{(y_3-1)^2}{2} = 1$

Zadatak 2. *Na sličan način uz primjenu* Mathematica*–naredbe* `ContourPlot3D` *pokušajte nacrtati niže navedene plohe drugog reda*

1. **Eliptički valjak**
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 0 \cdot z = 1, \quad a, b > 0$ *(nastaje gibanjem elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *uzduž osi* z*)*

2. **Hiperbolički valjak**
   $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 0 \cdot z = 1$ *(nastaje gibanjem hiperbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$ *uzduž osi* z*)*

3. **Parabolički valjak**
   $y^2 = 2px + 0 \cdot z, \quad p \neq 0$ *(nastaje gibanjem parabole* $y^2 = 2px$ *uzduž osi* z*)*

4. **Elipsoid**
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$
   Specijalno, za $a = b$*, to je* **rotacioni elipsoid***, a za* $a = b = c$*, to je* **sfera**.

5. **Jednokrilni hiperboloid**
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$
   Specijalno, za $a = b$*, to je* **rotacioni elipsoid***, a za* $a = b = c$*, to je* **sfera**.

6. **Dvokrilni hiperboloid**
   $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$

7. **Eliptički stožac (konus)**
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c > 0$

8. **Eliptički paraboloid**
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz, \quad a, b, c \neq 0$

9. **Hiperbolički paraboloid**
   $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \quad a, b, p \neq 0$

[1]

Literatura

[1] D. Blanuša, *Viša matematika I-1, I-2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

[2] T. S. Blyth, E. F, Robertson, *Basic Linear Algebra*, Springer-Verlag, London, 2002.

[3] D. Butković, *Kompleksni konačno dimenzionalni vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004

[4] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[1] Naveden je nešto opsežniji popis literature, ali sve su to knjige pomoću kojih student može utvrditi ili proširiti svoje znanje, a dostupne su u biblioteci Odjela za matematiku

[5] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[6] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2003.

[7] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear algebra*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[8] Е. И. Гурский, Основы линейной алгебры и аналитицеской геометрии, Вышейшая школа, Минск, 1982.

[9] K. Janich, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[10] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[11] D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[12] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2005

[13] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[14] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[15] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Наука, Москва, 1968.

[16] S. Lipschutz, *Beginning Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1997.

[17] S. Lipschutz, *Linear Algebra*, McGraw Hill, New York, 1991.

[18] S. Lipschutz, *3000 Solved Problems in Linear Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1989.

[19] E. D. Nering, *Linear algebra and matrix theory*, John Wiley & Sons, New York, 1963.

[20] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. Blickensdörfer-Ehlers, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991

[21] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[22] И. В. Проскуряков, *Problems in linear algebra*, Мир, Москва, 1978.

[23] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

[24] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1, 2*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.

[25] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.

[26] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1998, 2003.

[27] Zhang, Fuzhen, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.