A

1. **[20 bod.]** Neka je X realni vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)$. Dokažite da norma $\|\cdot\|$ inducirana tim skalarnim produktom zadovoljava jednakost paralelograma:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

2. **[20 bod.]** Za $x, y \in (0, \infty)$ definirajte $\varrho(x,y) = |1/x - 1/y|$. Pokazati da je ϱ metrika na $(0, \infty)$.

3. **[20 bod.]** Neka su x, y, u, z točke iz metričkog prostora (X, d). Dokažite nejednakost:

$$|d(x,z) - d(y,u)| \leq d(x,y) + d(z,u).$$

4. **[20 bod.]** Dokazati da je skup $U \subseteq X$ iz metričkog prostora (X, d) otvoren onda i samo onda ako se može prikazati kao unija neke familije otvorenih kugala.

5. **[20 bod.]** Neka je X topološki prostor, a $A \subseteq X$ proizvoljan podskup. Dokažite da je $\mathrm{Cl}\, A = X \backslash \mathrm{Int}\,(X \backslash A)$.

B

1. **[20 bod.]** Dokažite da u svakom unitarnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$ vrijedi Schwarzova nejednakost:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \qquad x, y \in X,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su x i y kolinearni vektori.

2. **[20 bod.]** Za $x, y \in \mathbb{R}$ definirajte

$$\varrho(x,y) = \left| \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} \right|.$$

Pokazati da je ϱ metrika na $\mathbb{R}$.

3. **[20 bod.]** Neka su x, y, z točke iz metričkog prostora (X, d). Dokažite nejednakost

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

4. **[20 bod.]** Neka je (X, d) metrički prostor. Dokazati da je otvorena kugla $K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ otvoren skup.

5. **[20 bod.]** Neka je X topološki prostor, a $A \subseteq X$ proizvoljan podskup. Dokažite da je $\mathrm{Int}\, A = X \backslash \mathrm{Cl}\,(X \backslash A)$.