A

1. [**20 bod.**] Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Pokažite da f nije neprekidna u točki $(0,0)$.

2. [**20 bod.**] Pokažite da svaka neprekidna funkcija $f : [a,b] \to [a,b]$ ima fiksnu točku.

3. [**20 bod.**] Neka je $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Pokažite da je f uniformno neprekidna na svakom skupu $[a,\infty)$, $a > 0$.

4. [**20 bod.**] Neka su X i Y topološki prostori, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Dokažite da je slika $f(K)$ kompaktan skup u Y.

5. [**20 bod.**] Neka je $f : X \to Y$ Lipschitzovo preslikavanje metričkih prostora. Dokažite da je f uniformno neprekidna.

B

1. [**20 bod.**] Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Pokažite da f nije neprekidna u točki $(0,0)$.

2. [**20 bod.**] Pokažite da su segmenti $A = [a,b]$ i $I = [0,1]$ homeomorfni.

3. [**20 bod.**] Neka je $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Pokažite da f nije uniformno neprekidna na intervalu $(0,2)$.

4. [**20 bod.**] Dokažite Weierstrassov teorem:
   Neka je X topološki prostor, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Tada f ima minimum i maksimum, tj. postoje točke $x_1, x_2 \in K$ sa svojstvom

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in K.$$

5. [**20 bod.**] Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, takva da joj je derivacija f' omeđena na (a,b). Pokažite da f ima Lipschitzovo svojstvo.