A

1. [**20 bod.**] Dokazati sljedeću tvrdnju:
   Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, $(Y, \mathcal{V})$ Hausdorffov prostor i $f : X \to Y$ funkcija. Ako funkcija f u točki $x_0 \in X'$ ima limes $L \in Y$, onda je on jedinstven.

2. [**20 bod.**] Dokažite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| \cdot |y|}{|x| + |y|} = 0.$$

3. [**20 bod.**] Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

4. [**15 bod.**] Neka je $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana formulom $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$. Dokažite da je $dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x}_0|\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

5. [**25 bod.**] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije u točki $x_0 \in \Omega$. Dokazati da je produkt $f \cdot g : \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija u x_0 i da vrijedi
$$d(fg)(x_0) = f(x_0)dg(x_0) + g(x_0)df(x_0).$$

B

1. [**20 bod.**] Dokazati sljedeću tvrdnju:
   Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, $(Y, \mathcal{V})$ Hausdorffov prostor i $f : X \to Y$ funkcija. Funkcija f je neprekidna u točki $x_0 \in X$ onda i samo onda ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. [**20 bod.**] Dokažite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0.$$

3. [**20 bod.**] Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

4. [**15 bod.**] Neka je $B \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica te neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana formulom $f(x) := (Bx|x)$. Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$ te da vrijedi $df(x_0)(x) = 2(Bx_0|x)$, $\forall x_0, x \in \mathbb{R}^n$.

5. [**25 bod.**] Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije u točki $x_0 \in \Omega$. Ako je $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in \Omega$, onda je $\frac{f}{g} : \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija u x_0 i vrijedi
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

   Dokazati.