1. **[20 bod.]** Neka je (X, ρ) metrički prostor. Pokažite da je formulom

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

zadana nova metrika na X.

2. **[20 bod.]** Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Pretpostavimo da je (A_n) niz zatvorenih podskupova od X sa sljedeća dva svojstva:

   (i) niz (A_n) je silazan

   (ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} A_k = 0$.

   Dokažite da je $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$.

3. **[20 bod.]** Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ kompaktni skupovi. Dokažite da je kompaktan i skup $C := A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

4. **[20 bod.]** Pokažite da $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj} \end{cases}$$

   ima prekid u svakoj racionalnoj točki, te da je neprekidna u svakoj iracionalnoj točki.

5. **[20 bod.]** Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulom

$$f(x, y) := \begin{cases} x^2 + y^2, & x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

   u svim točkama domene.

U Osijeku, 20.02.2008.