Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
09.02.2009.

1. [**20 bod.**] Dokažite da je s

$$d(x,y) = \left| \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} \right|, x, y \in \mathbb{R}.$$

   zadana metrika na $\mathbb{R}$.

2. [**20 bod.**] Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ ekvivalentne norme na realnom vektorskom prostoru $(X,+,\cdot)$. Dokažite da je prostor $(X,\|\cdot\|)$ potpun onda i samo onda ako je prostor $(X,\|\cdot\|')$ potpun.

3. [**20 bod.**] Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ kompaktni skupovi. Dokažite da je kompaktan i skup $C := A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

4. [**20 bod.**] Neka je X topološki, a Y metrički prostor. Neka je (f_k), $f_k : X \to Y$ niz neprekidnih funkcija, koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to Y$. Dokažite da je f neprekidna funkcija.

5. [**20 bod.**] Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)^2, & y \neq 0 \\ ax+b, & y = 0 \end{cases}$$

   bude neprekidna, a zatim u svim točkama za koje je $y = 0$ odredite parcijalne derivacije funkcije. Ispitajte i njenu diferencijabilnost.

Dragana Jankov