Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
07.09.2009.

1. (a) [**15 bod.**] Neka je (X, ρ) metrički prostor. Pokažite da je sa

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

zadana nova metrika na X.

(b) [**5 bod.**] Neka su x, y, u, z točke iz metričkog prostora (X, d). Dokažite da vrijedi

$$\left| d(x, z) - d(y, u) \right| \leq d(x, y) + d(z, u).$$

2. Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u $\mathbb{R}^n$.

(a) [**15 bod.**] Neka niz (x_k) konvergira prema x_0. Pokažite da (y_k) konvergira prema x_0 ako i samo ako $d(x_k, y_k) \to 0$.

(b) [**5 bod.**] Neka je $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = 0$. Pokažite da je tada $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \mathbf{0}$.

3. Dokažite ili opovrgnite:

(a) [**10 bod.**] Ako je $F \subseteq X$ kompaktan, X Hausdorffov i $x \notin F$, onda se x i F mogu separirati disjunktnim, otvorenim skupovima.

(b) [**10 bod.**] Kompaktan podskup Hausdorffovog prostora je zatvoren.

4. [**20 bod.**] Ispitajte jesu li funkcije $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirane formulama

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ako je } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ako je } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

neprekidne u točki $(0, 0)$.

5. [**20 bod.**] Neka su funkcije $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirane formulama

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^4}{x^2 + y^4}, & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ako je } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}, & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ako je } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Ispitajte da li navedene funkcije imaju limes u točki $(0, 0)$.

Dragana Jankov