2. kolokvij iz Realne analize
08.05.2012.

1. **[10 bod.]** Neka je (x_k) konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d). Pokažite da je njegov limes jedinstven.
2. **[15 bod.]** Pokažite, direktno iz definicije, da je niz (x_k) zadan s općim članom $x_k = \dfrac{\sin(k^2)}{k}$, Cauchyjev.
3. **[10 bod.]** U metričkom prostoru (X, d) skup $F \subseteq X$ je zatvoren onda i samo onda ako svaki niz (x_k) iz F koji konvergira u X ima limes u F. Dokažite samo smjer $\Rightarrow$.
4. **[15 bod.]** Neka je (X, d) metrički prostor. Točka $x_0 \in X$ je gomilište niza (x_k) onda i samo onda ako postoji podniz (x_{u_k}) koji konvergira prema x_0. Dokažite samo smjer $\Rightarrow$.
5. **[15 bod.]** Neka je (x_k) Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d). Dokažite: Ako neki podniz od (x_k) konvergira prema x_0, onda i cijeli niz (x_k) konvergira prema x_0.
6. **[10 bod.]** Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora (X, d), a $F \subseteq K$ zatvoren podskup. Pokažite da je tada i F kompaktan.
7. **[10 bod.]** Neka su A i B kompaktni podskupovi iz metričkog prostora X. Dokažite da je tada i skup $A \cap B$ kompaktan.
8. **[15 bod.]** Ispitajte da li je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirana s

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

neprekidna u točki $(0,0)$.