1. kolokvij iz Realne analize
07.04.2011.
Grupa A

1. [**10 bod.**] Neka je X realan vektorski prostor s normom $\|\cdot\|$ koja zadovoljava jednakost paralelograma. Dokažite da postoji skalarni produkt na X koji inducira normu.

2. [**10 bod.**] Neka je (X, ρ) metrički prostor. Pokažite da je s

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \ x, \, y \in X$$

zadana nova metrika na X.

3. [**15 bod.**] Neka je X topološki prostor, a $A \subseteq X$ proizvoljan podskup. Dokažite da je $\mathrm{Cl}\, A = X \backslash \mathrm{Int}\,(X \backslash A)$.

4. [**5 bod.**] Ilustrirajte primjerom da je općenito $\mathrm{Int}\,(A \cup B) \neq \mathrm{Int}\, A \cup \mathrm{Int}\, B$.

5. [**10 bod.**] Neka je (y_k) niz u $\mathbb{R}^n$ takav da je $\lim\limits_{k \to \infty} \|y_k\| = 0$. Pokažite da je tada $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = \mathbf{0}$.

6. [**20 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, $A \subseteq X$ i $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$. Dokažite da je $A \cap O \neq \emptyset$ za svaku okolinu O točke x_0.

7. [**10 bod.**] Ilustrirajte primjerom da u topološkom prostoru limes niza ne mora biti jedinstven.

8. [**20 bod.**] Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Dokažite da je točka $x_0 \in X$ je gomilište niza (x_k) onda i samo onda ako postoji podniz (x_{u_k}) koji konvergira prema x_0.

1. kolokvij iz Realne analize
07.04.2011.
Grupa B

1. [**10 bod.**] Neka je X realan vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)$. Dokažite da norma inducirana tim skalarnim produktom zadovoljava jednakost paralelograma

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. [**10 bod.**] Pokažite da je formulom

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|}$$

zadana nova metrika na $\mathbb{R}^2$.

3. [**15 bod.**] Neka je X topološki prostor, a $A \subseteq X$ proizvoljan podskup. Dokažite da je $\mathrm{Int}\, A = X \backslash \mathrm{Cl}\,(X \backslash A)$.

4. [**5 bod.**] Ilustrirajte primjerom da je općenito $\mathrm{Cl}\,(A \cap B) \neq \mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}\, B$.

5. [**10 bod.**] Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u metričkom prostoru (X, d), te neka niz (y_k) konvergira prema y_0 i $d(x_k, y_k) \to 0$. Pokažite da tada i niz (x_k) konvergira prema y_0.

6. [**20 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je $A \cap O \neq \emptyset$ za svaku okolinu O točke x_0, onda je $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$.

7. [**10 bod.**] Ilustrirajte primjerom da u topološkom prostoru limes niza ne mora biti jedinstven.

8. [**20 bod.**] Iskazati i dokazati Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove.